

# Datenanalyse in der Physik

## Vorlesung 2

### Wahrscheinlichkeit in der Physik

Prof. Dr. J. Mnich

DESY und Universität Hamburg



Universität Hamburg

Datenanalyse in der Physik

Vorlesung 2 – p. 1

### Wahrscheinlichkeit in der Physik

Warum ist der Begriff der Wahrscheinlichkeit in der Physik wichtig?

- Die klassische Physik, z.B. klassische Mechanik, ist im Prinzip deterministisch

Der Ausgang eines Experimentes ist exakt vorhersagbar und hängt nicht von „Zufällen“ ab

Aus exakter Kenntnis aller relevanten Parameter folgt exakte Voraussage des Resultats

Beispiel Wurf eines Balls:

Kenntnis von Geschwindigkeit, Abwurfwinkel, Luftdruck etc. ergibt den Aufschlagpunkt

- ⇒ Klassische Physik ist im Prinzip unabhängig von Zufällen und Wahrscheinlichkeiten

Resultat der klassischen Voraussage des Ballwurfs ist ein fester Wert und nicht eine Verteilung von möglichen Werten, die mit bestimmten Wahrscheinlichkeiten eintreten



Universität Hamburg

Datenanalyse in der Physik

Vorlesung 2 – p. 2

# Wahrscheinlichkeit in der Physik

Aber...

- In der Realität können die Parameter (z.B. Anfangsbedingungen) nicht beliebig genau bestimmt werden

Viele Experimente hängen auf so komplexe Art und Weise von diesen ab, dass das Resultat „zufällig“ wird

Man denke an mechanische Zufallsgeneratoren wie Münzwurf, Würfel, Roulette, etc.

Auch beim Ballwurf führt limitierte Genauigkeit der Parameter zu begrenzter Genauigkeit

(Wahrscheinlichkeitsverteilung der möglichen Aufschlagpunkte)

⇒ Ausgang von Experimenten ist mehr oder weniger von „Zufällen“ bestimmt

- In der Praxis liegt oft auch das umgekehrte Problem vor

Aus Experiment mit begrenzter Genauigkeit (Messfehler) ⇒

Bestimmung von physikalischen Größen, inklusive deren Ungenauigkeit

Ziel dieser Vorlesung ist die Vermittlung und Einübung der mathematischen Methoden zur Analyse von Daten unter Einbeziehung deren Ungenauigkeit



Universität Hamburg

Datenanalyse in der Physik

Vorlesung 2 – p. 3

## Wahrscheinlichkeit in der Quantenphysik

- Quantenphysik ist prinzipiell nicht deterministisch  
Es können nur Aussagen über Wahrscheinlichkeiten gemacht werden

Beispiel Wasserstoffatom:

Der genaue Ort des Elektrons kann prinzipiell nicht gemessen oder berechnet werden

Nur die Wahrscheinlichkeit, dass sich das Elektron in einem bestimmten Bereich aufhält, kann berechnet und gemessen werden.

⇒ Wahrscheinlichkeiten spielen zentrale Rolle in der Quantenphysik  
Prozesse der Quantenphysik sind statistischer Natur

- Bemerkung:

Quantenphysik steht nicht im Widerspruch zur klassischen Physik

Das Korrespondenzprinzip besagt, dass Gesetze der Quantenphysik für große Teilchenzahlen und Dimensionen (makroskopische Körper) in die Gesetze der klassischen Physik übergehen

Prinzipielle Rolle der Wahrscheinlichkeit geht dadurch wieder verloren



Universität Hamburg

Datenanalyse in der Physik

Vorlesung 2 – p. 4

# Radioaktive Zerfälle I

Einfachstes Beispiel für die statistische Natur der Quantenphysik sind radioaktive Zerfälle:

- Spontane Umwandlungen von instabilen Atomkernen unter Aussendung von energiereichen Teilchen (Strahlung)
- Quantenphysik beschreibt die Wahrscheinlichkeit  $dP$ , dass ein Kern im Zeitintervall  $d\tau$  zerfällt:

$$dP = \lambda d\tau$$

Man nennt  $\lambda$  die Zerfallskonstante  
(hängt nur von den physikalischen Gegebenheiten im Atomkern ab)

- Falls  $N(\tau)$  gleichartige Kerne zum Zeitpunkt  $\tau$  vorliegen, so ist die mittlere Zahl der Zerfälle  $-dN(\tau)$  im Zeitintervall  $d\tau$

$$-dN(\tau) = N(\tau) - N(\tau + d\tau) = N(\tau) \lambda d\tau$$

$$\int_0^t \frac{dN(\tau)}{N(\tau)} = \int_0^t -\lambda d\tau \quad \text{Integration von 0 bis } t$$

$$\ln \frac{N(t)}{N_0} = -\lambda t \quad N(t=0) = N_0$$



Universität Hamburg

Datenanalyse in der Physik

Vorlesung 2 – p. 5

# Radioaktive Zerfälle II

⇒ das bekannte Zerfallsgesetz:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

- **Bemerkungen:**  
 $\lambda$  ist eine Wahrscheinlichkeit (pro Zeiteinheit)  
⇒ Das Zerfallsgesetz beschreibt die mittlere Zahl der Kerne  $N(t)$  bzw. der Zerfälle  $-dN = N \lambda dt$
- Die tatsächliche Zahl der Zerfälle ist nicht konstant, sie unterliegt statistischen Schwankungen
- Analogie zu Zufallsexperimenten wie Münzwurf, Würfel, Roulette, ...



Universität Hamburg

Datenanalyse in der Physik

Vorlesung 2 – p. 6

# Statistische und systematische Fehler

- Ausgang von Experimenten unterliegt statistischen Schwankungen  
Wie kann man trotzdem z.B. die Zerfallskonstante  $\lambda$  (oder Lebensdauer  $\tau = 1/\lambda$ ) des Nuklids bestimmen?

- Bei nur einer Messung, u.U. große, statistische Schwankungen

⇒ statistischer Fehler

Wie groß ist diese Unsicherheit?

- Geeignete Mittelung über viele Messungen reduziert Unsicherheit  
Ist aber nicht immer möglich!

Wie oft bzw. wie lange muss man für eine geforderte Genauigkeit messen?

⇒ Mathematische Behandlung

- **Bemerkung:** Daneben gibt es noch die sogenannten systematischen Fehler  
Grund: Messgenauigkeit der Apparaturen, ungenaue Kenntnis von Randbedingungen etc.

Mathematische Theorie nur für statistische Fehler  
Systematische Fehler müssen vom Experimentator bestimmt (abgeschätzt) werden und können dann häufig wie statistische Fehler behandelt werden



Universität Hamburg

Datenanalyse in der Physik

Vorlesung 2 – p. 7

## Mathematische Behandlung von Wahrscheinlichkeiten

Definition von Wahrscheinlichkeit:

### 1) Symmetrieüberlegung:

Können Ereignisse auf  $n$  gleichwahrscheinliche Arten auftreten und haben  $k$  die Eigenschaft  $\mathcal{A}$ , so ist die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von Ereignis  $\mathcal{A}$

$$P(\mathcal{A}) = \frac{k}{n}$$

Beispiel perfekter Würfel:  $n = 6$

$$\mathcal{A}: \text{würfeln einer 6} \Rightarrow k = 1 \quad P(\mathcal{A}) = \frac{1}{6}$$

$$\mathcal{A}: \text{würfeln einer geraden Zahl} \Rightarrow k = 3 \quad P(\mathcal{A}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

### 2) Empirische Definition (R. von Mises, 1928)

Eine Beobachtung wird  $n$ -mal unter gleichen Bedingungen durchgeführt  
Wenn das Ereignis  $\mathcal{A}$   $k$ -mal auftritt, so ist dessen Wahrscheinlichkeit

$$P(\mathcal{A}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{n}$$

Man nennt diese Definitionen von Wahrscheinlichkeit auch frequentistisch



Universität Hamburg

Datenanalyse in der Physik

Vorlesung 2 – p. 8

# Mathematische Behandlung von Wahrscheinlichkeiten

- Die frequentistische Definition von Wahrscheinlichkeiten nicht immer anwendbar

Voraussetzung ist, dass das Experiment beliebig oft unter gleichen Bedingungen wiederholbar ist

- Anwendungsbeispiel Versicherungen:  
Autoversicherungen können Risiko (Wahrscheinlichkeit eines Unfalls) gut aus vorhandenen Daten abschätzen
- Gegenbeispiel Versicherung eines Satelliten:  
Angenommen 10 Raketenstarts seien erfolgreich verlaufen  
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der nächste misslingt?
- In solchen Fällen ist Annahme über Wahrscheinlichkeit notwendig (sogenannter Prior)  
Das führt zur subjektiven Wahrscheinlichkeit oder Bayes Statistik (siehe unten)

## Warnung:

Wahrscheinlichkeiten (auch in in der Physik) sind nicht so trivial wie es vielleicht auf den ersten Blick aussieht



Universität Hamburg

Datenanalyse in der Physik

Vorlesung 2 – p. 9

## Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung basiert auf drei Axiomen:

Sei  $\mathcal{S}$  die Menge aller möglichen Ereignisse (z.B. Ausgänge eines Experimentes) und  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  zwei solche Ereignisse

1.  $P(\mathcal{A}) \geq 0$       Wahrscheinlichkeit ist positiv

2.  $P(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = P(\mathcal{A}) + P(\mathcal{B})$

für sich ausschliessende Ereignisse  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$ , d.h. Ereignisse, die nicht gleichzeitig auftreten können: (disjunkte Ereignisse)  $P(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = 0$

### Addition von Wahrscheinlichkeiten

$P(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$  ist Wahrscheinlichkeit, dass Ereignis  $\mathcal{A}$  oder  $\mathcal{B}$  auftritt

3.  $P(\mathcal{S}) = 1$       das Experiment muss einen Ausgang haben

Definition der Wahrscheinlichkeit ist natürlich mit diesen Axiomen kompatibel



Universität Hamburg

Datenanalyse in der Physik

Vorlesung 2 – p. 10

# Theoreme der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Aus diesen Axiomen können Eigenschaften von Wahrscheinlichkeiten abgeleitet werden

Beispiele

1.  $P(\bar{\mathcal{A}}) = 1 - P(\mathcal{A})$  wobei  $\bar{\mathcal{A}}$  das zu  $\mathcal{A}$  komplementäre Ereignis ist
2.  $P(\mathcal{A} \cup \bar{\mathcal{A}}) = 1$
3.  $0 \leq P(\mathcal{A}) \leq 1$
4.  $P(\emptyset) = 0$   $\emptyset$  leere Menge
5. für  $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$  gilt  $P(\mathcal{A}) \leq P(\mathcal{B})$   
 $\mathcal{A}$  ist Teilmenge von  $\mathcal{B}$
6.  $P(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = P(\mathcal{A}) + P(\mathcal{B}) - P(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$



Universität Hamburg

Datenanalyse in der Physik

Vorlesung 2 – p. 11

## Bedingte Wahrscheinlichkeiten

● Wahrscheinlichkeit, dass  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  zusammen auftreten, ist

$$P(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = P(\mathcal{A}) \cdot P(\mathcal{B}|\mathcal{A})$$

$P(\mathcal{B}|\mathcal{A})$  ist die Wahrscheinlichkeit, dass Ereignis  $\mathcal{B}$  auftritt, vorausgesetzt, dass auch  $\mathcal{A}$  auftritt

●  $\Rightarrow$  Definition bedingte Wahrscheinlichkeit:

$$P(\mathcal{B}|\mathcal{A}) = \frac{P(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})}{P(\mathcal{A})}$$

Wahrscheinlichkeit für  $\mathcal{B}$  unter der Bedingung  $\mathcal{A}$

● Wegen  $P(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = P(\mathcal{A}) \cdot P(\mathcal{B}|\mathcal{A}) = P(\mathcal{B}) \cdot P(\mathcal{A}|\mathcal{B})$  folgt Bayes' Theorem:

$$P(\mathcal{A}|\mathcal{B}) = P(\mathcal{B}|\mathcal{A}) \frac{P(\mathcal{A})}{P(\mathcal{B})}$$



Universität Hamburg

Datenanalyse in der Physik

Vorlesung 2 – p. 12

# Unabhängigkeit von Ereignissen

- Falls das Auftreten von  $\mathcal{B}$  nicht davon abhängt, ob  $\mathcal{A}$  auftritt oder nicht, gilt

$$P(\mathcal{B}|\mathcal{A}) = P(\mathcal{B})$$

Nach dem Bayes' Theorem gilt dann auch  $P(\mathcal{A}|\mathcal{B}) = P(\mathcal{A})$

Man sagt, die Ereignisse  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  sind unabhängig

- In diesem Fall gilt

$$P(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = P(\mathcal{A}) \cdot P(\mathcal{B})$$

Multiplikation der Wahrscheinlichkeit unabhängiger Ereignisse



Universität Hamburg

Datenanalyse in der Physik

Vorlesung 2 – p. 13

## Beispiel I

- Wir betrachten folgende Ereignisse:

$\mathcal{A}$ : Es ist Sonntag  $P(\mathcal{A}) = 1/7$

$\mathcal{B}$ : Es regnet  $P(\mathcal{B}) = 1/2$  (Schätzwert für Hamburg)

Wir können annehmen, dass es sich um unabhängige Ereignisse handelt, also  $P(\mathcal{B}|\mathcal{A}) = P(\mathcal{B})$ :

$$P(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = P(\mathcal{A}) \cdot P(\mathcal{B}|\mathcal{A}) = P(\mathcal{A}) \cdot P(\mathcal{B}) = 1/14$$

ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufälliges gewähltes Datum ein regnerischer Sonntag ist

- Wir ändern nun das Ereignis  $\mathcal{A}$ :

$\mathcal{A}$ : Es ist November  $P(\mathcal{A}) \approx 1/12$

$\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  sind nun wohl nicht mehr unabhängig, da die Regenwahrscheinlichkeit von der Jahreszeit abhängt

$P(\mathcal{B}|\mathcal{A}) \neq P(\mathcal{B})$  ist Wahrscheinlichkeit, dass es im November regnet



Universität Hamburg

Datenanalyse in der Physik

Vorlesung 2 – p. 14

# Beispiel II

## Multiplikation $\leftrightarrow$ Addition von Wahrscheinlichkeiten

Wir betrachten zwei Spielwürfel:

$\mathcal{A}_i$ : Ereignis „Augenzahl  $i$ “ Würfel A  $P(\mathcal{A}_i) = 1/6$   $i = 1, \dots, 6$   
 $\mathcal{B}_i$ : Ereignis „Augenzahl  $i$ “ Würfel B  $P(\mathcal{B}_i) = 1/6$

Wir können annehmen, dass Augenzahlen der beiden Würfel unabhängige Ereignisse sind, also z.B.  $P(\mathcal{A}_i | \mathcal{B}_j) = P(\mathcal{A}_i) = 1/6$

$\Omega_k$  bezeichne das Ereignis „Summe der Augenzahlen  $k$ “:

$\Rightarrow$  Wahrscheinlichkeit eines Wurfereignisses durch Multiplikation

$$P(\mathcal{A}_i \cap \mathcal{B}_j) = P(\mathcal{A}_i) \cdot P(\mathcal{B}_j)$$

$\Rightarrow$  Addition der Wahrscheinlichkeiten, die gleiches Ereignis  $\Omega_k$  ergeben

| $\Omega_k$ | $P(\Omega_k)$                                                                                                                 |                   |          |
|------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------|----------|
| 2          | $P(\mathcal{A}_1) \cdot P(\mathcal{B}_1)$                                                                                     | $= 1/6 \cdot 1/6$ | $= 1/36$ |
| 3          | $P(\mathcal{A}_1) \cdot P(\mathcal{B}_2) + P(\mathcal{A}_2) \cdot P(\mathcal{B}_1)$                                           | $= 1/36 + 1/36$   | $= 1/18$ |
| 4          | $P(\mathcal{A}_1) \cdot P(\mathcal{B}_3) + P(\mathcal{A}_2) \cdot P(\mathcal{B}_2) + P(\mathcal{A}_3) \cdot P(\mathcal{B}_1)$ | $= 3 \cdot 1/36$  | $= 1/12$ |

...



Universität Hamburg

Datenanalyse in der Physik

Vorlesung 2 – p. 15

## Das „Gameshow-Problem“

1. Am Ende einer Gameshow kann der Kandidat zwischen 3 Toren wählen. Hinter einem Tor verbirgt sich der Preis, die beiden anderen enthalten Nieten.
2. Nachdem der Kandidat gewählt hat, lässt der Showmaster eines beiden anderen Tore öffnen, hinter dem sich eine Niete befindet.
3. Der Kandidat hat nun die Wahl entweder bei seiner Wahl zu bleiben oder ein anderes Tor wählen. Was würden Sie tun?

Wechseln verdoppelt die Gewinnaussicht!

$\mathcal{A}_i$ : Preis befinde sich hinter Tor  $i$   $i = 1, \dots, 3$

● Nach Punkt 1 des Spiels gilt

$$P(\mathcal{A}_1) = P(\mathcal{A}_2) = P(\mathcal{A}_3) = 1/3 \quad \sum_i P(\mathcal{A}_i) = 1$$

● Nach Punkt 2 ändert sich das Spiel! Eine Niete wird preisgegeben!

O.B.d.A. nehmen wir an, dass der Kandidat Tor 1 gewählt hat und der Showmaster Tor 2 öffnen lässt

$$P(\mathcal{A}_1) = 1/3$$

$$P(\mathcal{A}_2) + P(\mathcal{A}_3) = 1/3 + 1/3 = 2/3 \quad \text{vor dem Öffnen}$$

$$P(\mathcal{A}_2) + P(\mathcal{A}_3) = 0 + 2/3 = 2/3 \quad \text{nach dem Öffnen}$$



Universität Hamburg

Datenanalyse in der Physik

Vorlesung 2 – p. 16

# Wahrscheinlichkeit nach Bayes

- Häufige Fragestellung in der Physik (und anderen Naturwissenschaften):

Ein Experiment liefert Daten, die im Rahmen einer Theorie interpretiert werden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass auf Grund dieser Daten die Theorie richtig ist?

- Beispiel aus der Teilchenphysik:

Die Detektoren am Teilchenbeschleuniger LHC suchten nach dem Higgs-Teilchen. Nach Analyse der Daten stellte sich die Frage, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Higgs-Teilchen existiert?

- Ansatz ist das Bayes' Theorem:

$$P(\mathcal{A}|\mathcal{B}) \cdot P(\mathcal{B}) = P(\mathcal{B}|\mathcal{A}) \cdot P(\mathcal{A})$$

oder

$$P(\mathcal{A}|\mathcal{B}) = \frac{P(\mathcal{B}|\mathcal{A})}{P(\mathcal{B})} P(\mathcal{A})$$

- Man interpretiert nun

$\mathcal{A}$  als Theorie (oder Hypothese) und  
 $\mathcal{B}$  als Resultat der Beobachtung (Experiment)



Universität Hamburg

Datenanalyse in der Physik

Vorlesung 2 – p. 17

## Wahrscheinlichkeit nach Bayes II

$$\Rightarrow P(\text{Theorie} | \text{Resultat}) = \frac{P(\text{Resultat} | \text{Theorie})}{P(\text{Resultat})} P(\text{Theorie})$$

- $P(\text{Theorie} | \text{Resultat})$  Wahrscheinlichkeit für Richtigkeit der Theorie, unter Berücksichtigung der Daten

- $P(\text{Resultat} | \text{Theorie})$  Wahrscheinlichkeit für das experimentelle Resultat, falls die Theorie richtig ist

- $P(\text{Resultat})$  Wahrscheinlichkeit für das experimentelle Resultat, unabhängig von der Richtigkeit der Theorie  
Berechenbar für statistische Unsicherheiten

- $P(\text{Theorie})$  Wahrscheinlichkeit für Richtigkeit der Theorie

Die Interpretation der experimentellen Daten setzt immer eine a priori Beurteilung der Theorie voraus (sogenannter Prior)

- Bestimmt durch „Glauben“ an die Theorie

$\Rightarrow$  subjektive Wahrscheinlichkeit

im Gegensatz zur frequentistischen Wahrscheinlichkeit

- Grundlage für Bayes Statistik



Universität Hamburg

Datenanalyse in der Physik

Vorlesung 2 – p. 18

# Verteilungen von Zufallsvariablen

In der Physik besonders wichtig sind Experimente, deren mögliche Ausgänge durch statistisch (zufällig) verteilte Werte beschrieben werden

→ Zufallsvariablen

Man unterscheidet:



## Diskrete Zufallsvariablen

können abzählbare Werte  $r$  annehmen mit  $r \in \mathbb{N}$  und  $a \leq r \leq b$

Die Wahrscheinlichkeit, mit der der Wert  $r$  auftritt, wird mit  $P(r)$  bezeichnet

Es muss gelten:

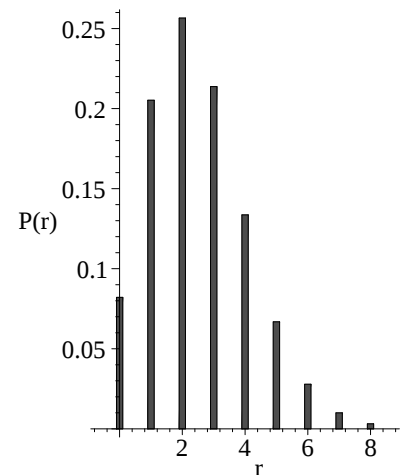
$$\sum_{r=a}^b P(r) = 1$$

Beispiel ist ein Experiment zur Radioaktivität:

$r$  bezeichnet die Zahl der beobachteten Zerfälle im betrachteten Zeitintervall

Offenbar gilt

$$r \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad 0 \leq r < \infty$$



Datenanalyse in der Physik

Vorlesung 2 – p. 19



Universität Hamburg

# Verteilungen von Zufallsvariablen



## Kontinuierliche Zufallsvariablen

können ein Kontinuum von Werten annehmen

Typischerweise sind das Messwerte, die durch eine reelle Zahl  $x$  angegeben werden

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Wert im Intervall  $a \leq x \leq b$  liegt, ist:

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

Man nennt  $f(x)$  die

## Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

engl. **probability density function** oder **pdf**

Für eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion muss offenbar gelten

$$f(x) \geq 0 \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$



Universität Hamburg

Datenanalyse in der Physik

Vorlesung 2 – p. 20

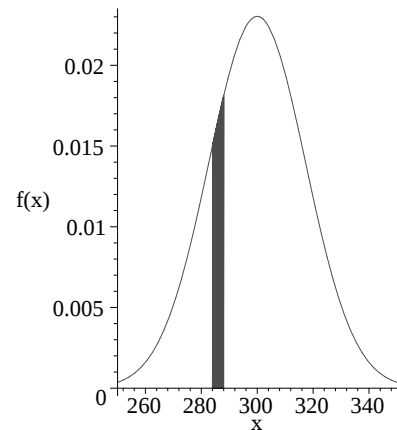
# Verteilungen von Zufallsvariablen

Achtung: die Frage, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein genauer Wert  $x$  angenommen wird, ist unsinnig!  
Diese Wahrscheinlichkeit ist Null!

$f(x)$  ist keine Wahrscheinlichkeit

Bei kontinuierlichen Zufallsvariablen sind Wahrscheinlichkeiten nur in einem Intervall definiert, z.B.

$$P(x \dots x + dx) = f(x) dx$$



## Integrierte oder kumulative Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x') dx'$$

mit  $F(-\infty) = 0$  und  $F(+\infty) = 1$

gibt die Wahrscheinlichkeit an, einen Wert kleiner oder gleich  $x$  zu finden



Universität Hamburg

Datenanalyse in der Physik

Vorlesung 2 – p. 21

## Erwartungswerte und Momente

### Wichtige Parameter einer pdf $f(x)$ sind Erwartungswerte von Funktionen

Definition des Erwartungswerts einer Funktion  $h(x)$

$$E[h(x)] = \int h(x) f(x) dx \quad (\int \equiv \int_{-\infty}^{\infty})$$

### Wichtige Spezialfälle sind die Momente einer pdf

Das  $n$ -te Moment ist definiert als Erwartungswert der Funktion

$$h(x) = x^n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Der Mittelwert  $\mu$  einer Verteilung ist demnach das 1. Moment bzw. der Erwartungswert  $E[x]$ :

$$\mu = \langle x \rangle = E[x] = \int x f(x) dx$$



Universität Hamburg

Datenanalyse in der Physik

Vorlesung 2 – p. 22

# Erwartungswerte und Momente

- **Zentrale Momente sind Momente bezüglich des Mittelwertes,**  
d.h. Erwartungswerte der Funktionen  $h(x) = (x - \langle x \rangle)^n$

$$E[(x - \langle x \rangle)^n] = \int (x - \langle x \rangle)^n f(x) dx$$

- **Spezialfälle:**

- Das 1. zentrale Moment verschwindet:

$$\begin{aligned} E[x - \langle x \rangle] &= \int (x - \mu) f(x) dx = \underbrace{\int x f(x) dx}_{= \mu} - \mu \underbrace{\int f(x) dx}_{= 1} \\ &= \mu - \mu = 0 \end{aligned}$$

- Das 2. zentrale Moment ist die Varianz:

$$\begin{aligned} \sigma^2 = E[(x - \langle x \rangle)^2] &= \int (x - \mu)^2 f(x) dx \\ &= \int x^2 f(x) dx - 2\mu \underbrace{\int x f(x) dx}_{= \mu} + \mu^2 \underbrace{\int f(x) dx}_{= 1} \\ &= E[x^2] - \mu^2 \end{aligned}$$



# Erwartungswerte und Momente

## Diskrete Zufallsvariablen:

$r$  mit  $\in \mathbb{N}$  und  $a \leq r \leq b$

Die Momente sind analog über Summen definiert, z.B.:

- **Mittelwert**

$$\mu = \langle r \rangle = E[r] = \sum_{r=a}^b r P(r)$$

- **Varianz**

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= E[(r - \langle r \rangle)^2] = \sum_{r=a}^b (r - \mu)^2 P(r) \\ &= E[r^2] - \mu^2 \end{aligned}$$



# Charakterisierung von Wahrscheinlichkeitsdichten

## Position der Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung:

### Median $x_m$

$$\int_{-\infty}^{x_m} f(x) dx = 0,5 \quad \text{oder} \quad F(x_m) = 0,5$$

d.h. gleiche Wahrscheinlichkeiten einen Wert  $x$  größer oder kleiner als  $x_m$  zu finden

### Wahrscheinlichster Wert

definiert über absolutes Maximum von  $f(x)$

## Breite der Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung:

### Quadratischer Mittelwert engl. root-mean-square (rms)

$$x_{rms} = \sqrt{E[x^2]} = \sqrt{\sigma^2 + \mu^2}$$

### FWHM (full-width-half-maximum)

Definiert als positive Differenz der beiden  $x$ -Werte, bei denen  $f(x)$  auf die Hälfte des Maximums abgefallen ist



Universität Hamburg

Datenanalyse in der Physik

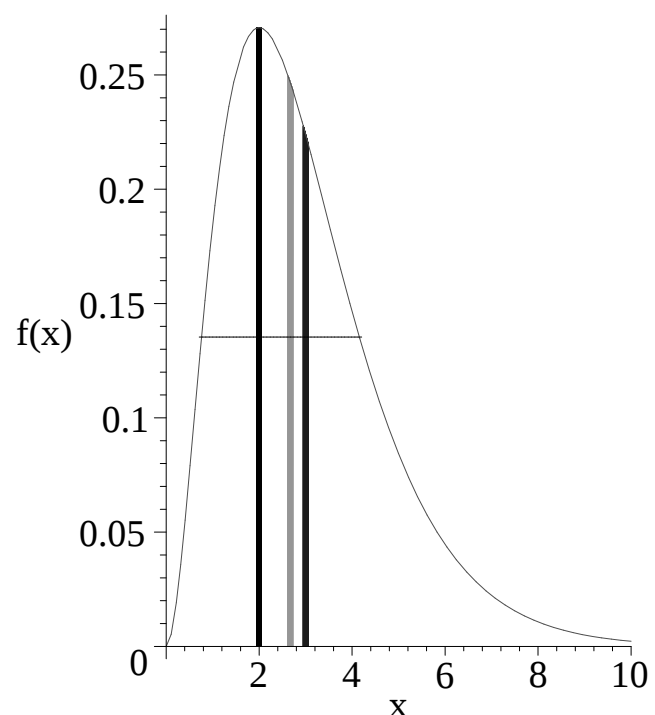
Vorlesung 2 – p. 25

# Charakterisierung von Wahrscheinlichkeitsdichten

## Beispiel einer willkürlichen pdf:

$$f(x) = \frac{1}{2} x^2 e^{-x} \quad x \geq 0$$

|                   |                       |
|-------------------|-----------------------|
| Mittelwert        | $\mu = 3$             |
| Median            | $x_m = 2,67$          |
| max. Wahrscheinl. | $x_{max} = 2$         |
| rms               | $x_{rms} = 2\sqrt{3}$ |
| Varianz           | $\sigma^2 = 3$        |
|                   | $\sigma = \sqrt{3}$   |
| FWHM              | 3,39                  |



Universität Hamburg

Datenanalyse in der Physik

Vorlesung 2 – p. 26