

Datenanalyse in der Physik

Vorlesung 3

Wichtige Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Prof. Dr. J. Mnich

DESY und Universität Hamburg



Universität Hamburg

Datenanalyse in der Physik

Vorlesung 3 – p. 1

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Im folgenden werden einige, für die Physik besonders wichtige, Wahrscheinlichkeitsverteilungen besprochen:

● diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Binomialverteilung

Poisson-Verteilung

● Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen (pdf)

Gleichverteilung

Exponentialverteilung

Gauß- oder Normalverteilung

χ^2 -Verteilung

Natürlich gibt es auch physikalische Probleme, bei denen andere Verteilungen angewendet werden müssen



Universität Hamburg

Datenanalyse in der Physik

Vorlesung 3 – p. 2

Spezielle diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Bernoulli-Versuch

Experiment mit 2 möglichen Ausgängen, d.h. einfachster denkbarer Fall

Beispiele: Münzwurf, Lottogewinn ja/nein,
Effizienz eines Geiger-Zähler: Signal ja/nein, etc.

Ausgänge eines Bernoulli-Versuchs werden mit der diskreten Zufallsvariablen ($r = 0, 1$) bezeichnet:

Ausgang		Wahrscheinlichkeit
Erfolg	$r = 1$	p
Misserfolg	$r = 0$	$q = 1 - p$

⇒ Wahrscheinlichkeitsverteilung für Bernoulli-Versuch

$$P(r; p) = p^r (1 - p)^{1-r} = p^r q^{1-r} \quad r = 0, 1 \quad 0 \leq p \leq 1$$

Die Zufallsvariable (r) wird durch ein Semikolon von anderen Parametern (p) getrennt



Universität Hamburg

Datenanalyse in der Physik

Vorlesung 3 – p. 3

Binomialverteilung

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit in n aufeinander folgenden Bernoulli-Versuchen r -mal Erfolg zu haben?

- Wahrscheinlichkeit, dass die ersten r Versuche erfolgreich sind und die folgenden $n - r$ nicht, ist:

$$p^r (1 - p)^{n-r}$$

Das ist aber nur eine Möglichkeit, denn die Reihenfolge von Erfolgen und Misserfolgen ist irrelevant!

- Kombinatorik:** Die Zahl der Kombinationen, mit der r -Objekte auf n Plätze verteilt werden können, ist

$$n \cdot (n - 1) \dots (n - r + 1) = \frac{n!}{(n - r)!}$$

wobei die r Objekte als verschieden angesehen werden

- Man kann r Objekte auf $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot r = r!$ verschiedene Weise aufreihen

⇒ Zahl der Kombinationen, r gleiche Objekte auf n -Plätze zu verteilen



Universität Hamburg

Datenanalyse in der Physik

Vorlesung 3 – p. 4

$$\frac{n!}{(n - r)! r!} \equiv \binom{n}{r}$$

Binomialverteilung

⇒ die Wahrscheinlichkeit, in n Bernoulli-Versuchen r -mal Erfolg zu haben, ist gegeben durch die Binomialverteilung:

$$P(r; p, n) = \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r} \quad r = 0, 1, \dots, n \quad 0 \leq p \leq 1$$

Die Koeffizienten $\binom{n}{r}$ werden Binomialkoeffizienten genannt

→ **Binomische Formel:**

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Rekursive Berechnung von $\binom{n}{k}$ über das
Pascalsche Dreieck:

Es gilt der Symmetriesatz

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

n	$\binom{n}{k}$
0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
...	...



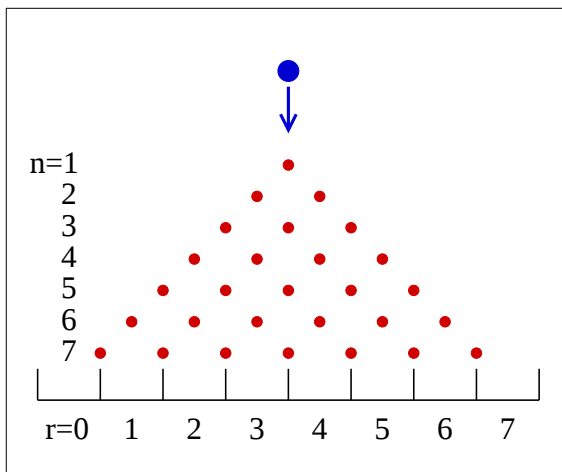
Universität Hamburg

Datenanalyse in der Physik

Vorlesung 3 – p. 5

Beispiel für Binomialverteilung

Nagelbrett:



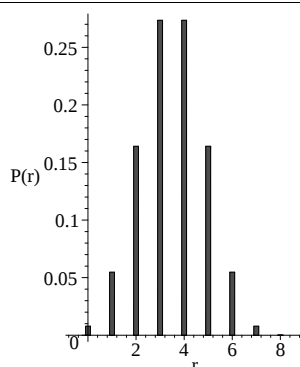
Bernoulli-Versuch:

Kugel fällt auf linke oder rechte Seite
(gleiche Wahrscheinlichkeiten)

Definiere Erfolg: Kugel fällt nach rechts

$$\Rightarrow p = 1/2$$

Zufallsvariable r zählt, wie oft die Kugel
nach rechts fällt



← Wahrscheinlichkeit entspricht der
Binomialverteilung $P(r; \frac{1}{2}, 7)$

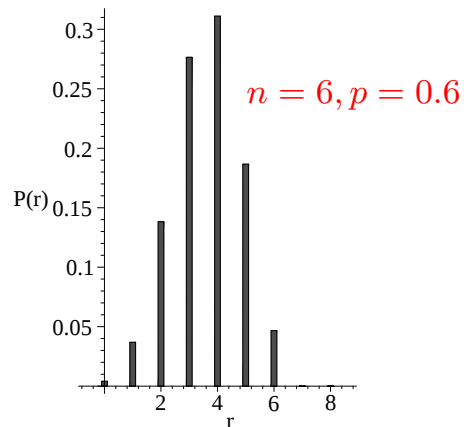
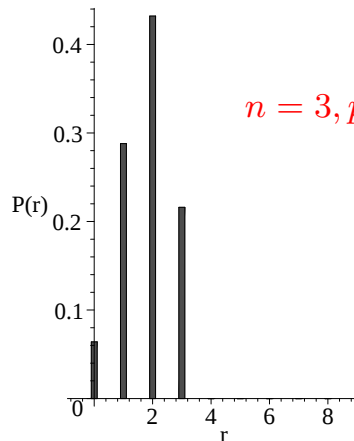
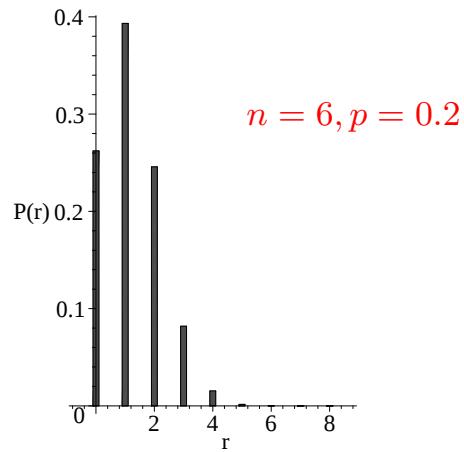
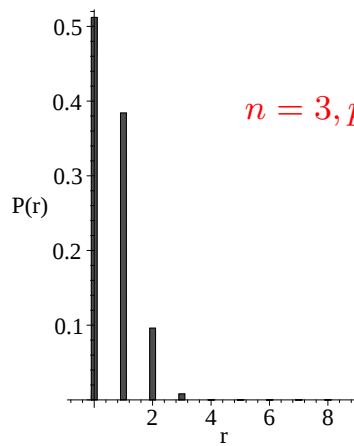


Universität Hamburg

Datenanalyse in der Physik

Vorlesung 3 – p. 6

Beispiele für Binomialverteilungen



Universität Hamburg

Datenanalyse in der Physik

Vorlesung 3 – p. 7

Eigenschaften der Binomialverteilung



Normierung:

Die Binomialverteilung ist korrekt auf 1 normiert

$$\sum_{r=0}^n P(r; p, n) = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r}$$

Binomische
→
Formel

$$= [p + (1-p)]^n = 1^n = 1$$



Mittelwert

$$\mu = \langle r \rangle = E[r] = \sum_{r=0}^n r P(r; p, n) = np$$



Varianz

$$\sigma^2 = E[(r - \langle r \rangle)^2] = \sum_{r=0}^n (r - \langle r \rangle)^2 P(r; p, n) = np(1-p)$$



Universität Hamburg

Datenanalyse in der Physik

Vorlesung 3 – p. 8

Beweise zur Binomialverteilung

Mittelwert:

Man betrachte die Binomialentwicklung:

$$f(t) = (pt + q)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} p^r t^r q^{n-r}$$

und differenziere nach t

$$\frac{df}{dt} = np(pt + q)^{n-1} = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} p^r r t^{r-1} q^{n-r}$$

Setze $t = 1$ und $q = 1 - p \Rightarrow$

$$np = \sum_{r=0}^n r \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r} = \sum_{r=0}^n r P(r; p, n) = \mu$$



Beweise zur Binomialverteilung

Varianz:

Man bilde die zweite Ableitung der Binomialentwicklung:

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = n(n-1)p^2 (pt + q)^{n-2} = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} p^r r(r-1) t^{r-2} q^{n-r}$$

und für $t = 1$ und $q = 1 - p$ gilt:

$$\begin{aligned} n(n-1)p^2 &= \sum_{r=0}^n r(r-1) \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r} \\ &= \sum_{r=0}^n r^2 P(r; p, n) - \sum_{r=0}^n r P(r; p, n) = E[r^2] - \mu \end{aligned}$$

Wir addieren den Term $\mu - \mu^2 = np - n^2 p^2$ und benutzen die allgemein gültige Formel $\sigma^2 = E[r^2] - \mu^2$

$$\begin{aligned} n^2 p^2 - np^2 + np - n^2 p^2 &= E[r^2] - \mu + \mu - \mu^2 \\ np(1-p) &= E[r^2] - \mu^2 = \sigma^2 \end{aligned}$$



Bernoulli oder Binomial?

Wann muss welche Verteilung angewendet werden?

● Beispiel: 10-maliger Münzwurf

● Wie wahrscheinlich ist es, Kopf zu würfeln?

⇒ 10 Bernoulli-Experimente

● Wie wahrscheinlich ist es, mindestens 5 mal Kopf zu würfeln?

⇒ 1 Binomial-Experiment mit $n=10$

● Beispiele aus der Physik:

● Bestimmung der Effizienz eines Geiger-Zählers aus 300 Ereignissen

⇒ 300 einzelne Bernoulli-Experimente

● Spurmessung eines geladenen Teilchens mit 10 Lagen Silizium-Detektoren (CMS-Experiment)

Spureffizienz?

⇒ Binomial-Verteilung mit $n=10$

● Bemerkung:

Die Bernoulli-Verteilung ergibt sich natürlich als Spezialfall der Binomial-Verteilung für $n = 1$



Universität Hamburg

Datenanalyse in der Physik

Vorlesung 3 – p. 11

Poisson-Verteilung

Wichtiger Grenzfall der Binomial-Verteilung in der Physik ist die

Poisson-Verteilung:

Grenzfall ist charakterisiert durch:

kleine Einzelwahrscheinlichkeiten $p \ll 1$

große Zahl an Bernoulli-Versuchen $n \gg 1$

endlicher ('konstanter') Mittelwert $\mu = np$

Anwendungsbeispiel aus der Physik ist der radioaktive Zerfall

Beispiele für natürliche Strahler:

Nuklid		mittl. Lebensd. τ	Zerfallskonst. λ
Uran	^{238}U	$6,5 \cdot 10^9$ Jahre	$5 \cdot 10^{-18} \text{ s}^{-1}$
Kohlenstoff	^{14}C	$8 \cdot 10^3$ Jahre	$4 \cdot 10^{-12} \text{ s}^{-1}$
Tritium	^3H	17,8 Jahre	$1,8 \cdot 10^{-9} \text{ s}^{-1}$

● Sehr kleine Zerfallswahrscheinlichkeit für einen Kern im Zeitintervall dt :

$$p = \lambda dt$$

● Aber es werden sehr viele Kerne ($6,02 \cdot 10^{23}$ pro Mol) untersucht

→ große Anzahl n von Bernoulli-Versuchen



Universität Hamburg

Datenanalyse in der Physik

Vorlesung 3 – p. 12

Herleitung der Poisson-Verteilung

Wir ersetzen in der Binomial-Verteilung $p = \mu/n$ und ordnen um:

$$\begin{aligned} P(r; p, n) &= \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r} \\ &= \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{r!} \left(\frac{\mu}{n}\right)^r \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{n-r} \\ &= \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{n^r} \frac{\mu^r}{r!} \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{n-r} \\ &= \frac{\mu^r}{r!} \left[1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{r-1}{n}\right) \right] \frac{\left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^n}{\left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^r} \end{aligned}$$

Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ wobei μ konstant bleibt:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{r-1}{n}\right) \right] &= 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^n &= e^{-\mu} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^r &= 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ np = \mu = \text{const}}} P(r; p, n) = P(r; \mu) = \frac{\mu^r}{r!} e^{-\mu}$$



Universität Hamburg

Datenanalyse in der Physik

Vorlesung 3 – p. 13

Poisson-Verteilung

$\Rightarrow$ die Wahrscheinlichkeit, r Ereignisse zu erhalten, wenn die Zahl der Versuche n sehr hoch und die Wahrscheinlichkeit p sehr klein ist, ist gegeben durch die Poisson-Verteilung:

$$P(r; \mu) = \frac{\mu^r}{r!} e^{-\mu}$$

Eigenschaften der Poisson-Verteilung:

- Die Poisson-Verteilung hat nur einen Parameter, den Mittelwert μ
- und ist eine diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung: $r \in \mathbb{N}$, $\mu \in \mathbb{R}$
- Normierung ist 1:

$$\sum_{r=0}^{\infty} P(r; \mu) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\mu^r}{r!} e^{-\mu} = e^{-\mu} \underbrace{\sum_{r=0}^{\infty} \frac{\mu^r}{r!}}_{= e^{\mu}} = e^{-\mu} e^{\mu} = 1$$



Universität Hamburg

Datenanalyse in der Physik

Vorlesung 3 – p. 14

Poisson-Verteilung

Der Mittelwert ist in der Tat μ :

$$\begin{aligned}
 \langle r \rangle &= E[r] = \sum_{r=0}^{\infty} r P(r; \mu) = \sum_{r=0}^{\infty} r \frac{\mu^r}{r!} e^{-\mu} && \text{1. Summand ist Null} \\
 &= \sum_{r=1}^{\infty} r \frac{\mu^r}{r!} e^{-\mu} = \mu e^{-\mu} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\mu^{r-1}}{(r-1)!} && k = r - 1 \\
 &= \mu e^{-\mu} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^k}{k!}}_{= e^{\mu}} = \mu
 \end{aligned}$$

Die Varianz hat ebenfalls den Wert μ :

$$\sigma^2 = E[(r - \langle r \rangle)^2] = \mu$$

Das folgt aus der Varianz der Binomialverteilung $\sigma^2 = np(1-p)$ und dem Grenzübergang $p \rightarrow 0$ mit $np = \mu = \text{const}$



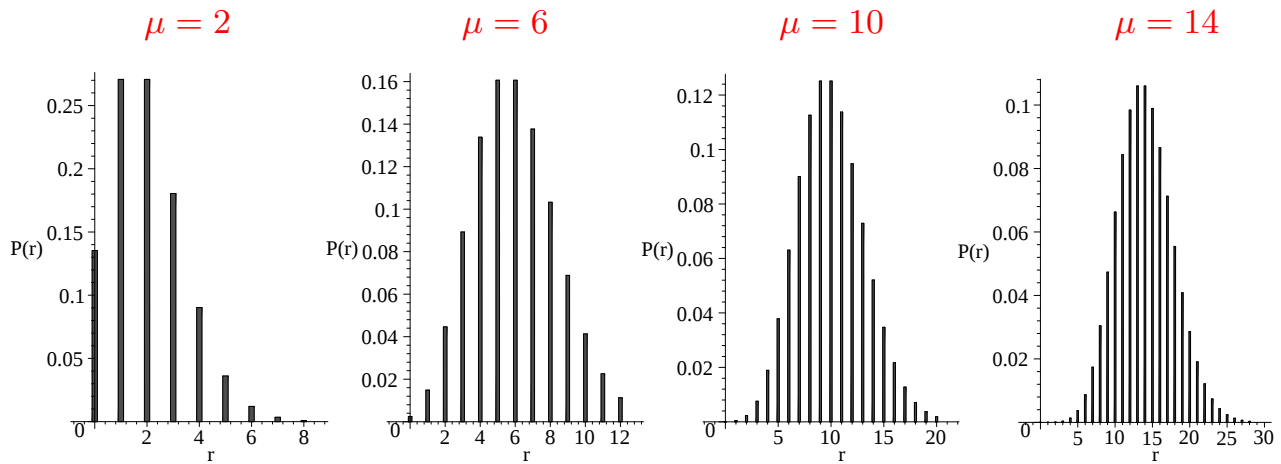
Poisson-Verteilung

Andere Herleitung für die Varianz der Poisson-Verteilung:

$$\begin{aligned}
 \sigma^2 &= E[(r - \langle r \rangle)^2] = E[r^2] - \mu^2 = \sum_{r=0}^{\infty} r^2 \frac{\mu^r}{r!} e^{-\mu} - \mu^2 && \text{1. Summand ist Null} \\
 &= \sum_{r=1}^{\infty} r^2 \frac{\mu^r}{r!} e^{-\mu} - \mu^2 = \mu \sum_{r=1}^{\infty} r \frac{\mu^{r-1}}{(r-1)!} e^{-\mu} - \mu^2 && k = r - 1 \\
 &= \mu \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} - \mu^2 = \underbrace{\mu \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}}_{=\mu} + \underbrace{\mu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}}_{=1} - \mu^2 \\
 &= \mu
 \end{aligned}$$



Beispiele Poisson-Verteilung



- Verteilung wird mit steigendem μ immer symmetrischer
- Übergang zu kontinuierlicher Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung
→ Gauß- oder Normalverteilung



Universität Hamburg

Datenanalyse in der Physik

Vorlesung 3 – p. 17

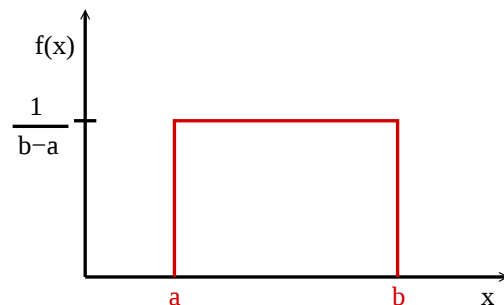
Spezielle Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen

Wir besprechen nun einige wichtige Verteilungen für kontinuierliche Zufallsvariablen

Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen (pdf)

- Gleichverteilung (d.h. die einfachste pdf)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



Der Pseudo-Zufallszahlengenerator `drand48()` der Standardbibliothek in C erzeugt solche gleichverteilte Zufallszahlen im Bereich $0 \leq x < 1$

Achtung: dabei handelt es sich eigentlich um diskrete Zufallszahlen

- Mittelwert und Varianz

$$\mu = \frac{a+b}{2} \quad \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$



Universität Hamburg

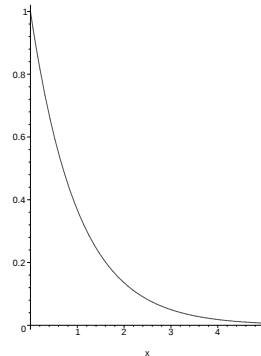
Datenanalyse in der Physik

Vorlesung 3 – p. 18

Exponentialverteilung

● Häufig folgen kontinuierliche Zufallsvariablen einer Exponentialfunktion

$$f(x; \lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & 0 \leq x < \infty \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$



● Mittelwert und Varianz

$$\mu = 1/\lambda \quad \sigma^2 = 1/\lambda^2$$



Universität Hamburg

Datenanalyse in der Physik

Vorlesung 3 – p. 19

Beispiel Exponentialverteilung

Die pdf der Zeitabstände zwischen zwei Kernzerfällen ist eine Exponentialfunktion

Wir betrachten einen instabilen Kern vom Zeitpunkt $\tau = 0$ bis zu seinem Zerfall $\tau = t$ und das Zeitintervall t wird in $(n + 1)$ Intervalle $\Delta\tau = t/n$ eingeteilt

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Kern im Intervall $\Delta\tau$ zerfällt, ist $\lambda \Delta\tau$ bzw. dass er nicht zerfällt $1 - \lambda \Delta\tau$

Damit ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, dass der Kern in den ersten n Intervallen nicht zerfällt, aber im $(n + 1)$ -sten, zu

$$\Delta P = (1 - \lambda \Delta\tau)^n \lambda \Delta\tau = \left(1 - \lambda \frac{t}{n}\right)^n \lambda \Delta\tau = f(t) \Delta\tau$$

wobei $f(t)$ die gesuchte Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion ist

Mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$ folgt sofort

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

Wenn man nun N Kerne gleichzeitig betrachtet, erhält man mit der gleichen Argumentation eine Exponentialfunktion für die Verteilung der Zeitintervalle zwischen zwei Zerfällen (ersetzen von λ durch $N\lambda$)



Universität Hamburg

Datenanalyse in der Physik

Vorlesung 3 – p. 20

Gauß-Verteilung

Die wichtigste Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung ist die Gauß-Verteilung, die auch Normalverteilung genannt wird:

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty < x < \infty$$

- Parameter sind der Mittelwert μ und die Varianz σ^2
- Für $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ erhält man die standardisierte Gauß-Verteilung (Parametertransformation $x = (x' - \mu)/\sigma$)

$$f(x; 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

- Bedeutung der Gauß-Verteilung folgt aus dem zentralen Grenzwertsatz (kommt später)
- **Gauß-Verteilung ergibt sich als Grenzfall**
 - der Binomialverteilung für $n \rightarrow \infty$
 - der Poisson-Verteilung für $\mu \rightarrow \infty$



Universität Hamburg

Datenanalyse in der Physik

Vorlesung 3 – p. 21

Herleitung der Gauß-Verteilung

1.) Gauß-Verteilung als Grenzfall der Binomialverteilung:

$$P(r; p, n) = \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r} = \frac{n!}{(n-r)! r!} p^r (1-p)^{n-r}$$

oder in logarithmischer Schreibweise:

$$\ln P(r; p, n) = \ln n! - \ln(n-r)! - \ln r! + r \ln p + (n-r) \ln(1-p)$$

Für große Zahlen k kann die Fakultät durch die Stirling-Formel genähert werden:

$$\begin{aligned} \ln k! &\approx \left(k + \frac{1}{2}\right) \ln k - k + \frac{1}{2} \ln(2\pi) \approx k \ln k \\ \frac{d \ln k!}{dk} &\approx \frac{d}{dk} (k \ln k) = \ln k + k \frac{1}{k} \approx \ln k \end{aligned}$$

Mit dieser Näherung leiten wir $\ln P(r)$ ab, wobei wir nun r als kontinuierliche Variable auffassen,

$$\frac{d \ln P(r)}{dr} \approx \ln(n-r) - \ln r + \ln p - \ln(1-p)$$

und das Maximum der Verteilung bestimmen:



Universität Hamburg

Datenanalyse in der Physik

Vorlesung 3 – p. 22

Herleitung der Gauß-Verteilung

$$\left. \frac{d \ln P(r)}{dr} \right|_{r=r_{max}} = 0 = \ln(n - r_{max}) - \ln r_{max} + \ln p - \ln(1 - p)$$

$$\Rightarrow \ln[r_{max}(1 - p)] = \ln[p(n - r_{max})] \Rightarrow r_{max} = pn = \langle r \rangle$$

D.h. das Maximum der Verteilung ist für große n gleich dem Mittelwert.

Wir berechnen zunächst die zweite Ableitung an dieser Stelle

$$\left. \frac{d^2 \ln P(r)}{dr^2} \right|_{r=\langle r \rangle} \approx -\frac{1}{n - r} - \frac{1}{r} \bigg|_{r=\langle r \rangle} = -\frac{1}{n(1 - p)} - \frac{1}{np} = -\frac{1}{np(1 - p)} = -\frac{1}{\sigma^2}$$

denn $\sigma^2 = np(1 - p)$, und entwickeln um das Maximum

$$\begin{aligned} \ln P(r) &= \ln P(\langle r \rangle) + (r - \langle r \rangle) \left. \frac{d \ln P(r)}{dr} \right|_{r=\langle r \rangle} + \frac{1}{2!} (r - \langle r \rangle)^2 \left. \frac{d^2 \ln P(r)}{dr^2} \right|_{r=\langle r \rangle} + \dots \\ &\approx \ln P(\langle r \rangle) - (r - \langle r \rangle)^2 \frac{1}{2\sigma^2} = \text{const} - \frac{(r - np)^2}{2\sigma^2} \end{aligned}$$

weil die erste Ableitung an der Stelle $r = \langle r \rangle$ ja verschwindet. Die pdf hat also die Form einer Gauß-Verteilung mit den Parametern $\mu = np$ und $\sigma^2 = np(1 - p)$.

Die Konstante ergibt sich z.B. aus der Normierungsbedingung:

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \text{const} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



Universität Hamburg

Datenanalyse in der Physik

Vorlesung 3 – p. 23

Herleitung der Gauß-Verteilung

2. Gauß-Verteilung als Grenzfall der Poisson-Verteilung:

(Herleitung völlig analog zur Binomialverteilung)

$$P(r; \mu) = \frac{\mu^r}{r!} e^{-\mu} \Rightarrow \ln P(r; \mu) = r \ln \mu - \mu - \ln r!$$

Aus Näherung der 1. Ableitung für große, kontinuierliche r ($\frac{d \ln r!}{dr} \approx \ln r$)

$$\frac{d \ln P(r)}{dr} \approx \ln \mu - \ln r$$

folgt für das Maximum der Wahrscheinlichkeit

$$\left. \frac{d \ln P(r)}{dr} \right|_{r=r_{max}} = 0 \Rightarrow \ln r_{max} = \ln \mu \Rightarrow r_{max} = \mu$$

Die 2. Ableitung an dieser Stelle ist (mit $\sigma^2 = \mu$ für Poisson-Verteilung)

$$\frac{d^2 \ln P(r)}{dr^2} \approx -\frac{1}{r} \Rightarrow \left. \frac{d^2 \ln P(r)}{dr^2} \right|_{r=r_{max}} = -\frac{1}{r_{max}} = -\frac{1}{\mu} = -\frac{1}{\sigma^2}$$

Taylor-Entwicklung bis zum quadratischen Term ergibt dann wieder

$$\ln P(r) \approx \ln P(r_{max}) - (r - r_{max})^2 \frac{1}{2r_{max}} = \text{const} - \frac{(r - \mu)^2}{2\sigma^2}$$

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \text{const} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



Universität Hamburg

Datenanalyse in der Physik

Vorlesung 3 – p. 24

Gauß-Verteilung als Grenzübergang

Binomialverteilung

$$P(r; p, n) = \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r}$$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \\ np = \mu = \text{const} \end{array}$$

Poisson-Verteilung

$$P(r; \mu) = \frac{\mu^r}{r!} e^{-\mu}$$

$$\begin{array}{c} \searrow \\ n \rightarrow \infty \\ np(1-p) = \sigma^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \swarrow \\ \mu \rightarrow \infty \\ \sigma^2 = \mu \end{array}$$

Gauß-Verteilung

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Maple Arbeitsblatt zur Veranschaulichung: `gauss.mws`

⇒ Gauß-Verteilung ist bereits für relative kleine Werte von μ eine gute Näherung (jedenfalls im Zentralbereich der Verteilung)



Universität Hamburg

Datenanalyse in der Physik

Vorlesung 3 – p. 25

Numerisches Beispiel: Gauß als Näherung der Binomialverteilung

Problem: Eine Münze wird 100-mal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit genau 55-mal Kopf zu erhalten?

Exakte Lösung aus Binomialverteilung mit $p = \frac{1}{2}$ und $n = 100$

$$P(r = 55; \frac{1}{2}, 100) = 4,85\%$$

Näherung durch kontinuierliche Gauß-Verteilung

$$P(x) = \int_{\Delta x} f(x') dx' \approx f(x) \cdot \Delta x = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot \Delta x$$

mit $\mu = np = 50$ und $\sigma^2 = np(1-p) = 25$, sowie $x = 55$ und $\Delta x = 1$ folgt

$$P(55) = 4,84\%$$

Die Übereinstimmung geht für r -Werte, die weit vom Mittelwert entfernt sind, verloren

Das obige Beispiel für $r = 90$:

$$\begin{array}{ll} \text{Binomial:} & P(r = 90) \approx 1 \cdot 10^{-17} \\ \text{Gauß:} & P(90) \approx 1 \cdot 10^{-15} \end{array}$$



Universität Hamburg

Datenanalyse in der Physik

Vorlesung 3 – p. 26

Kumulative Gauß-Verteilung

Von großer Wichtigkeit ist auch die kumulative oder integrierte Gauß-Funktion:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$

für die gilt:

$$\Phi(-\infty) = 0 \quad \Phi(+\infty) = 1 \quad \Phi(\mu) = \frac{1}{2}$$

Lezteres folgt aus der Symmetrie der Gauß-Verteilung: μ ist auch der Median

Dieses Integral ist nicht analytisch darstellbar und man benutzt die Gauß'sche Fehlerfunktion $\text{erf}(x)$ ($\equiv$ error function)

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

um die kumulative Gauß-Verteilung zu berechnen (unabhängig von μ und σ). Die Fehlerfunktion steht als $\text{erf}(x)$ bzw. $\text{erfc}(x) = 1 - \text{erf}(x)$ in der C-Bibliothek und in Maple zur Verfügung

Es gilt

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} \left[1 + \text{erf} \left(\frac{x - \mu}{\sqrt{2}\sigma} \right) \right]$$



Universität Hamburg

Datenanalyse in der Physik

Vorlesung 3 – p. 27

Kumulative Gauß-Verteilung

Beweis:

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt && \text{Setze } s = \frac{t - \mu}{\sqrt{2}\sigma} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \sqrt{2}\sigma \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}} e^{-s^2} ds \\ &= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-s^2} ds}_{= \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}} e^{-s^2} ds}_{= \frac{1}{2} \text{erf} \left(\frac{x - \mu}{\sqrt{2}\sigma} \right)} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{erf} \left(\frac{x - \mu}{\sqrt{2}\sigma} \right) \end{aligned}$$



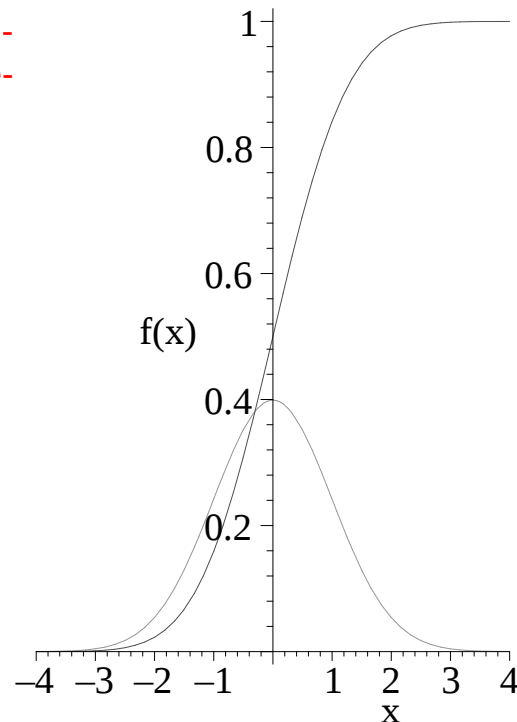
Universität Hamburg

Datenanalyse in der Physik

Vorlesung 3 – p. 28

Eigenschaften der Gauß-Verteilung

Graphische Darstellung der standardisierten Gauß-Verteilung und der integrierten Funktion:



Universität Hamburg

Datenanalyse in der Physik

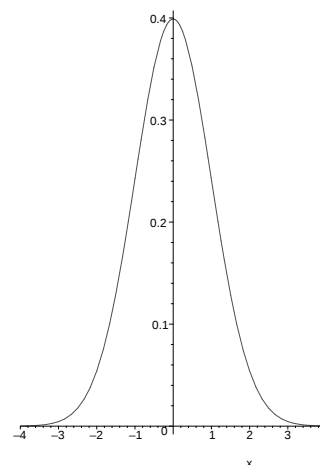
Vorlesung 3 – p. 29

Eigenschaften der Gauß-Verteilung

Wahrscheinlichkeiten in Intervallen um den Mittelwert μ :

Man beachte, dass die Gauß-Verteilung symmetrisch um $x = \mu$ ist, im Gegensatz zu Binomial- oder Poisson-Verteilung

Intervall	Wahrscheinlichkeit	
	innerhalb	außerhalb
$ x - \mu \leq 1\sigma$	68,27%	31,73%
$ x - \mu \leq 2\sigma$	95,45%	4,55%
$ x - \mu \leq 3\sigma$	99,73%	0,27%
$ x - \mu \leq 4\sigma$	99,99%	0,01%
$ x - \mu \leq 5\sigma$		$5,7 \cdot 10^{-7}$



Merke:

Eine gaußverteilte Zufallsvariable x liegt mit etwa

● 68% Wahrscheinlichkeit im Intervall $\mu - \sigma \leq x \leq \mu + \sigma$

● 95% Wahrscheinlichkeit im Intervall $\mu - 2\sigma \leq x \leq \mu + 2\sigma$



Universität Hamburg

Datenanalyse in der Physik

Vorlesung 3 – p. 30

Gauß-Verteilung und Standardabweichung

Man betrachte ein physikalisches Experiment, dessen Resultat eine gaußverteilte Zufallsvariable ist

Beispiel: radioaktiver Zerfall mit hoher, mittlerer Zahl der beobachteten Zerfälle μ

Wir nehmen zunächst an, dass μ bekannt sei

z.B. berechnet aus bekannter Zerfallskonstante des Kerns λ , Zahl der Kerne, etc.

- Daraus folgt, dass wir in unserem Experiment mit 68% Wahrscheinlichkeit einen Wert x beobachten, der im Intervall $\mu - \sigma \leq x \leq \mu + \sigma$ liegt

Man definiert den statistischen Fehler als die erwartete Standardabweichung σ einer gaußverteilten Zufallsvariablen

- Ein wichtiger Spezialfall ist, dass die Gauß-Verteilung der Grenzfall einer Binomial- bzw. Poisson-Verteilung ist (z.B. radioaktiver Zerfall)

$$\Rightarrow \sigma^2 = \mu \quad \text{oder} \quad \sigma = \sqrt{\mu}$$

Die Standardabweichung (Fehler) ist die Wurzel der erwarteten mittleren Zahl der beobachteten Ereignisse

- Bei anderen zu Grunde liegenden Verteilung bestimmt man Fehler aus der entsprechenden Varianz σ^2 . **Achtung: siehe auch Parameterschätzung (Fit)**



Universität Hamburg

Datenanalyse in der Physik

Vorlesung 3 – p. 31

Gauß-Verteilung und Standardabweichung

Was ist, wenn μ nicht von vorne herein bekannt ist, d.h. wenn μ aus den Messungen bestimmt werden soll?

(z.B. Messung der Zerfallskonstanten λ einer unbekannten radioaktiven Substanz)

→ Schätzung von Parametern

Rezept für Gauß-Verteilung als Grenzfall der Binomial-(Poisson)-Verteilung:

- **Bei nur einer Messung:**
Nehme an, dass Messwert x gleich dem Mittelwert ist $\mu = x$ und setze als Standardabweichung der Messung $\sigma = \sqrt{x}$
- **Bei n gleichen, wiederholten Messungen:**
Verbesserte Schätzung des Mittelwertes μ der zu Grunde liegenden Gauß-Verteilung über den Mittelwert der Messungen

$$\mu = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Falls Messungen wirklich statistisch gaußverteilt sind, gilt: $\sigma = \sqrt{\bar{x}}$

Überprüfung möglich durch Berechnung der Varianz aus den n Messungen

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$



Universität Hamburg

Datenanalyse in der Physik

Vorlesung 3 – p. 32

Die χ^2 -Verteilung

Eine wichtige Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung für Parameterschätzungen und statistische Tests ist die χ^2 -Verteilung

Anwendungen werden wir im weiteren Verlauf der Vorlesung kennenlernen

Seien $x_1, x_2, \dots, x_n$ unabhängige Zufallsvariablen, die der standardisierten Gauß-Verteilung folgen ($\mu = 0, \sigma = 1$), so folgt die Summe der Quadrate

$$u = \chi^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$$

einer χ^2 -Verteilung mit n -Freiheitsgraden:

$$f_n(u) = \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{u}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{u}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

Die x_i können z.B. mehrere gleiche Messungen sein oder auch Messpunkte auf einer Kurve

Statistische Stichprobe aller möglichen Resultate



Universität Hamburg

Datenanalyse in der Physik

Vorlesung 3 – p. 33

Die Γ -Funktion

Die χ^2 -Verteilung enthält die Γ -Funktion, die eine Verallgemeinerung der Fakultät für reelle Zahlen x ist

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \quad x > 0$$

Es gilt

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} \quad \Gamma(x) = (x-1) \Gamma(x-1)$$

Mit der rechten Formel können auch Werte für negative x berechnet werden ($x \neq 0, -1, -2, \dots$)

• für $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\Gamma(k+1) = k! \quad \text{denn} \quad \int_0^\infty e^{-x} x^k dx = k!$$

• für große x kann $\Gamma(x)$ durch Stirling-Formel angenähert werden

$$\ln \Gamma(x+1) \approx x \ln x$$



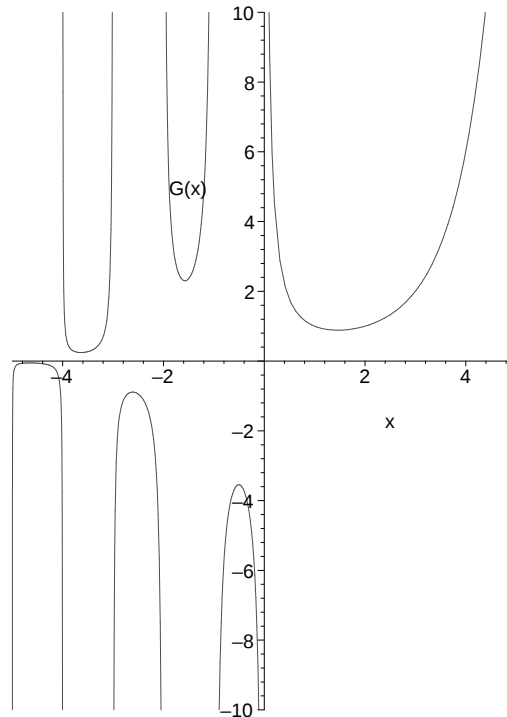
Universität Hamburg

Datenanalyse in der Physik

Vorlesung 3 – p. 34

Die Γ -Funktion

Die Γ -Funktion steht in Maple als $\text{GAMMA}(x)$ zur Verfügung



Universität Hamburg

Datenanalyse in der Physik

Vorlesung 3 – p. 35

Herleitung der χ^2 -Verteilung

Vollständige Herleitung der χ^2 -Verteilung ist etwas aufwendig (siehe z.B. Buch von Blobel & Lohrmann) Hier: Berechnung am Beispiel $n = 1 \implies \chi^2 = u = x^2$

Da x einer standardisierten Gauß-Verteilung folgt, ist die pdf in x

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Die in $f(x)dx$ enthaltene Wahrscheinlichkeit ist in der Zufallsvariablen u (Variablensubstitution $u = x^2$ und $\frac{du}{dx} = 2x = 2\sqrt{u}$)

$$f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u}{2}} \frac{du}{2\sqrt{u}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2u\pi}} e^{-\frac{u}{2}} = f(u) du$$

Der zusätzliche Faktor 2 berücksichtigt, dass es zu jedem u -Wert 2 Werte von x gibt: $x = \pm\sqrt{u}$ (Man überprüfe die Normierung $\int_0^\infty f(u) du = 1$)

Die so erhaltene pdf $f(u)$ entspricht der Definition der χ^2 -Verteilung $f_1(u)$

$$f_1(u) = \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{u}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{u}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2u\pi}} e^{-\frac{u}{2}} \quad \text{mit} \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$



Universität Hamburg

Datenanalyse in der Physik

Vorlesung 3 – p. 36

Eigenschaften der χ^2 -Verteilung

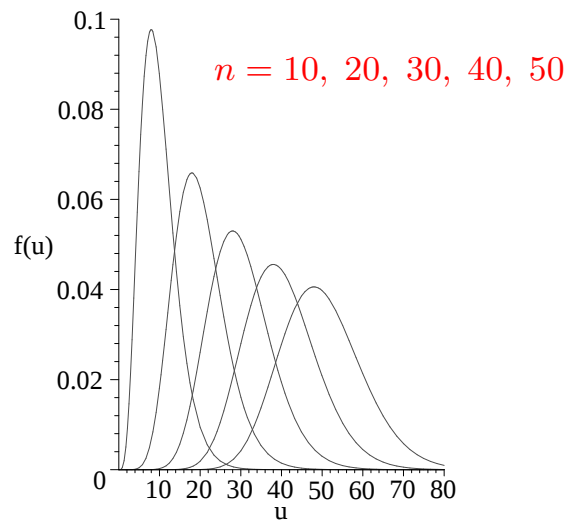
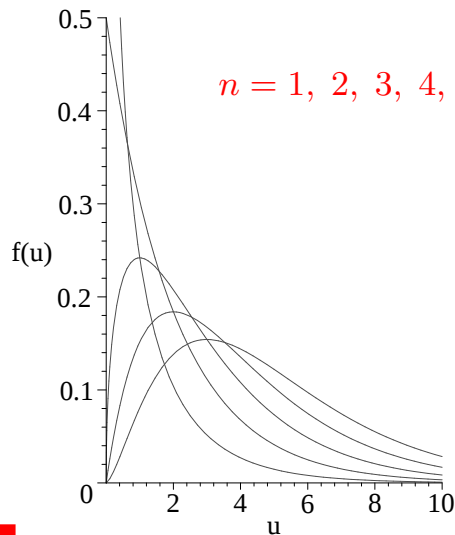
Mittelwert

$$\langle u \rangle = \langle \chi^2 \rangle = \int_0^\infty u f_n(u) du = n$$

ist gleich der Zahl der Freiheitsgrade n

Varianz

$$\sigma^2 = \int_0^\infty (u - \langle u \rangle)^2 f_n(u) du = 2n$$



Universität Hamburg

Datenanalyse in der Physik

Vorlesung 3 – p. 37

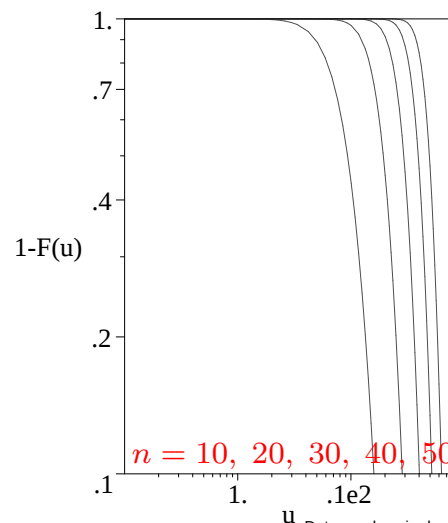
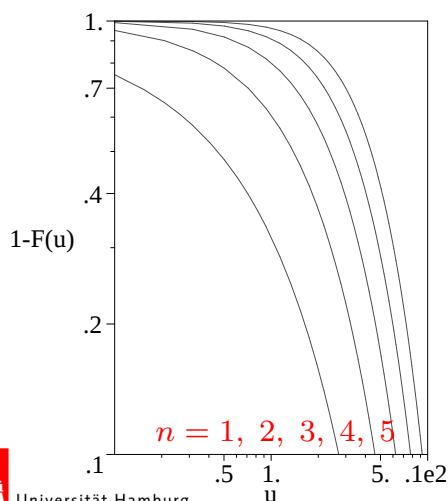
Integrierte χ^2 -Verteilung

Die Wahrscheinlichkeit, in einer Stichprobe $x_1, \dots, x_n$ einen Wert $\chi^2 = \sum_1^n x_i^2$ zu finden, der kleiner ist als u ist gegeben durch:

$$F_n(u) = \int_0^u f_n(t) dt$$

Entsprechend gibt $1 - F_n(u)$ die Wahrscheinlichkeit an, einen Wert größer als u zu finden

Graphische Darstellung der Funktion $1 - F_n(u)$ für verschiedene n :



Universität Hamburg

Datenanalyse in der Physik

Vorlesung 3 – p. 38

Eigenschaften wichtiger Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Verteilung	Variable	Funktion	Mittelwert	Varianz
Bernoulli	diskret	$P(r; p) = p^r (1 - p)^{1-r}$	p	$p(1 - p)$
Binomial	diskret	$P(r; p, n) = \binom{n}{r} p^r (1 - p)^{n-r}$	np	$np(1 - p)$
Poisson	diskret	$P(r; \mu) = \frac{\mu^r}{r!} e^{-\mu}$	μ	μ
Gleichvert.	kontinuierlich	$f(x; a, b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponential	kontinuierlich	$f(x; \lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & 0 \leq x < \infty \\ 0 & x < 0 \end{cases}$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$
Gauß	kontinuierlich	$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2
χ^2	kontinuierlich	$f_n(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{u}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{u}{2}} \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})}$	n	$2n$

