Datenanalyse in der Physik

Übung 1

Übungen zu C und MAPLE

Prof. J. Mnich

joachim.mnich@desy.de

DESY und Universität Hamburg

Bemerkungen zu den Übungen

- Schulungsaccounts und Passwörter
  Es sind 20 Accounts für diese Veranstaltung eingerichtet:
  `school01, school02, ..., school20`
  mit Passwort
- Bitte lassen Sie die Rechner nach Ende der Veranstaltung eingeschaltet
  Monitor kann ausgeschaltet werden
- Bitte erzeugen Sie am Anfang jeder Übung ein Verzeichnis
  `uebung1, uebung2, ...`
  und wechseln Sie dorthin

  `mkdir uebung01` erzeugt Verzeichnis mit Namen `uebung01`
  `cd uebung01` wechselt dorthin

  Erleichtert späteres Auffinden der Ergebnisse alter Übungen

Universität Hamburg

Umrechnung von Celsius in Fahrenheit

Von Gabriel Fahrenheit, dem Erfinder des Thermometers, wurde der Gefrierpunkt des Wassers zu 32°F und der Siedepunkt zu 212°F festgelegt.

1. Schreiben Sie ein C-Programm, das einen eingegebenen Wert von $^\circ$C in $^\circ$F umrechnet und ausgibt!
   Hinweis: Die Eingabe eines Wertes z.B. in die Variable `celsius` erfolgt durch

   ```
   scanf("%f", &celsius);
   ```

2. Schreiben Sie ein C-Programm, das die Celsius-Skala in die Fahrenheit-Skala umrechnet! Die Berechnung soll in 1°C Schritten von 0°C bis 100°C erfolgen.

Fügen Sie reichlich Kommentarzeilen in den C-Quellcode ein!

Maple – Numerische Berechnungen

Geben Sie die folgenden Terme in Maple ein:

$$
\begin{aligned}
s &:= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}\right)\\
t &:= -\frac{1}{3}\sqrt{(a^2-x^2)^3}\\
u &:= -\frac{x}{4}\sqrt{(a^2-x^2)^3}+\frac{a^2}{8}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}\right)\\
v &:= \frac{\sqrt{(a^2-x^2)^5}}{5}-a^2\frac{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}{3}\\
w &:= \sqrt{a^2-x^2}-a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}
\end{aligned}
$$

Werten Sie die Terme mit Hilfe des Befehls `eval` an den Stellen $a = 2\pi$ und $x = 1$ aus und geben Sie mit `evalf` den numerischen Wert auf 20 Dezimalstellen genau aus.

Maple – Grenzwerte, Summen und Produkte

- Berechnen Sie mit `limit`:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x$$

- Berechnen Sie mit `sum`:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k+3}{(k+1)(k+2)(k+3)}$$

- Berechnen Sie mit `sum`:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k}}{(2k)!}$$

- Berechnen Sie mit `product`:

$$\prod_{k=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$$

Maple – Zeichnen von Funktionen

- Zeichnen Sie die trigonometrischen Funktionen $\sin(x), \cos(x), \tan(x), \cot(x)$ im Bereich $[-\pi, +\pi]$ mit dem Befehl `plot`.
- Zeichnen Sie $\exp(-x/2)\sin(5x)$ zwischen 0 und 2π.
- Zeichnen Sie die Funktion $x\ \sin\frac{a}{x}$ zwischen $-\pi$ und π für einige Werte von a.
- Zeichnen Sie die Funktion $V(x,y) = (x^2+y^2)^2 - \frac{5}{3}(x^2+y^2)$ im Bereich $x \in [-1,1]$ und $y \in [-1,1]$ mit Hilfe des Befehls `plot3d`.
- Eine dreidimensionale Kurve sei gegeben durch:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sin t/2 \\ y(t) &= \sin\frac{3}{2}t \\ z(t) &= \sin 2t \end{aligned}$$

Zeichnen Sie die Kurve mit Hilfe von `spacecurve`.

DESY

UH Universität Hamburg

Maple – Differentiation

- Bilden Sie die folgenden Ableitungen:

$$\frac{d}{dx}\ln(\arctan(\ln(x))) \quad , \quad \frac{d}{dx}\frac{x^4 - a^4}{\sqrt{x^2 - a^2}} \quad , \quad \frac{d}{dx}x^{(x^x)} \quad , \quad \frac{d^{42}}{dx^{42}}\sin(kx)$$

- Gegeben sei folgende Funktion:

$$f(x, y) = \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}$$

Berechnen Sie nun folgenden Ausdruck:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}f - \frac{\partial^2}{\partial y^2}f + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}f - \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}f\right)\bigg|_{(x,y)=(a,a)}$$

Maple – Integration

- Bestimmen Sie die folgenden Integrale:

$$\int \tanh(x)\, dx \quad , \quad \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(\frac{-(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right)\, dx \quad , \quad \int x^2 \ln(x)\, dx \quad ,$$

$$\int (ax^2 + bx + c)\, dx \quad , \quad \int \frac{1}{ax^2 + bx + c}\, dx$$

- Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale:

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x-1}\, dx \quad , \quad \int_0^{\pi/2} \ln(\tan(x))\, dx \quad ,$$

$$\int_0^\infty e^{-hx} \cos^2(gx)\, dx \quad \text{mit} \quad h > 0 \quad , \quad \int_0^\infty \frac{1}{(1+x)x^a}\, dx \quad \text{mit} \quad a < 1 \quad ,$$

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{x}\, dx$$

Maple – Lineare Algebra

- Berechnen Sie AC, A^{-1}, AA^T und B^TAB mit:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 1 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- Lösen Sie das Gleichungssystem $Mx = b$ mit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- Lösen Sie die Eigenwertgleichung $Sv = \lambda v$ mit

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ -3 & 5 & -3 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

Maple – Gamma-Matrizen

In der Dirac-Pauli-Darstellung ergeben sich die 4×4 γ-Matrizen wie folgt aus den 2×2 Pauli-Matrizen

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \tau_i \\ \tau_i & 0 \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2, 3) \qquad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

wobei in der letzten Zeile 0 und 1 für die 2×2 Null- bzw. Einheitsmatrix stehen.
Den Vierervektor der γ-Matrizen γ^μ erhält man schließlich durch

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} \beta \\ \beta\vec{\alpha} \end{pmatrix} \qquad \mu = 0,\ 1,\ 2,\ 3$$

Aufgaben:
Zeigen Sie durch explizite Berechnung mit Hilfe von Maple, dass in dieser Darstellung die γ-Matrizen die nötigen Eigenschaften zum Lösen der Dirac-Gleichung aufweisen (siehe nächste Seite).

Maple – Gamma-Matrizen II

Zu beweisende Eigenschaften:

- Die γ-Matrizen sind spurlos
- Vertauschungsrelation: $\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \cdot 1$
  mit
  $$g^{\mu\nu} = \begin{cases} +1 & \text{für } \mu = \nu = 0 \\ -1 & \text{für } \mu = \nu \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
  und 1 stellt die 4×4 Einheitsmatrix dar.
- Für hermitisch-konjugierte γ-Matrizen muss gelten: $\gamma^{\mu\,\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$
- Vertauschungsrelation für $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$: $\gamma^5\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^5 = 0$
- Norm von γ^5: $(\gamma^5)^2 = 1$

Hinweis: definieren sie die Matrizen als Listenelemente, z.B. `Gamma[0] := Matrix(...); Gamma[1] := Matrix(...);` usw. und nutzen sie den `for`-Befehl.