

Datenverarbeitung in der Physik

Vorlesung 10

Numerische Integrationsmethoden und Lösung von Differentialgleichungen

Prof.Dr. J. Mnich

DESY und Universität Hamburg



Datenverarbeitung in der Physik Vorlesung 10 – p. 1

Numerische Integrationsmethoden

Wir wollen der MC Methode zwei numerische Integrationsmethoden zur Berechnung des Integrals

$$I = \int_a^b g(x) dx$$

gegenüberstellen

Trapezregel:

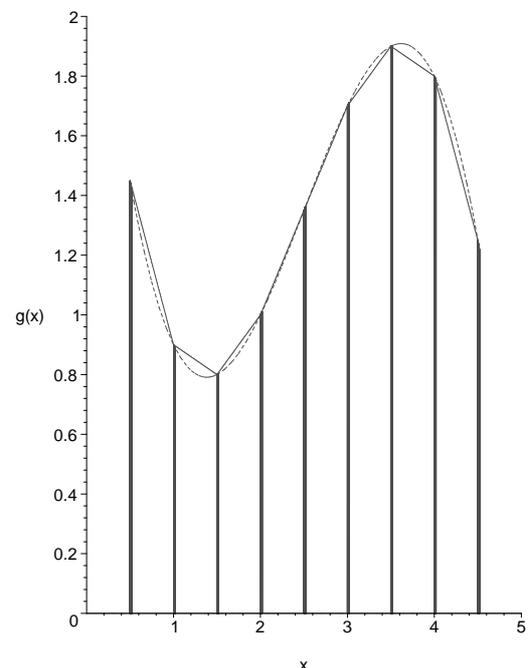
- Das Integrationsintervall wird in n gleiche Teile geteilt

$$h = \frac{b - a}{n}$$

- Dann erhält man eine Näherung aus der Summe der Flächeninhalte der n Trapeze

$$I \approx I_T = h \left(\frac{1}{2}g(x_0) + g(x_1) + \dots + g(x_{n-1}) + \frac{1}{2}g(x_n) \right)$$

mit $x_i = a + ih \quad i = 0, 1, \dots, n$



Datenverarbeitung in der Physik Vorlesung 10 – p. 2

Fehler der Trapezregel

Wie groß ist der Fehler der Trapeznäherung?

Wir betrachten das Integral in dem Teilintervall $[0, h]$ und entwickeln es:

$$\tilde{I} = \int_0^h g(x) dx = \int_0^h \left[g(0) + x g'(0) + \frac{x^2}{2} g''(0) + \dots \right] dx = hg(0) + \frac{1}{2} h^2 g'(0) + \frac{1}{6} h^3 g''(0) + \dots$$

Nach der Trapezregel ist dieses Teilintegral

$$\tilde{I}_T = \frac{1}{2} h [g(0) + g(h)] = \frac{1}{2} h \left[g(0) + \left(g(0) + hg'(0) + \frac{h^2}{2} g''(0) + \dots \right) \right]$$

Die Differenz zwischen Näherung und exakter Entwicklung ist:

$$\tilde{I}_T - \tilde{I} = 0 + 0 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) h^3 g''(0) + \dots \approx \frac{1}{12} h^3 g''(0)$$

Die Differenz $I_T - I$ im gesamten Integrationsbereich ergibt sich durch Summation über alle Teilintervalle der Breite $h = \frac{b-a}{n}$

$$I_T - I \approx \sum_{i=1}^n \frac{1}{12} \left(\frac{b-a}{n} \right)^3 g''(x_i)$$



Fehler der Trapezregel

Wir berechnen nun die Varianz des Trapezintegrals:

$$\begin{aligned} V[I_T] &= E [(I_T - I)^2] \approx E \left[\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{12} \left(\frac{b-a}{n} \right)^3 g''(x_i) \right)^2 \right] \\ &= \left(\frac{1}{12} \right)^2 \left(\frac{b-a}{n} \right)^6 E \left[\left(\sum_{i=1}^n g''(x_i) \right)^2 \right] \\ &= \left(\frac{1}{12} \right)^2 \left(\frac{b-a}{n} \right)^6 n^2 \langle g''(x_i) \rangle^2 \\ &= \left(\frac{1}{n^2} \frac{(b-a)^3}{12} \langle g''(x_i) \rangle \right)^2 = \sigma_{I_T}^2 \end{aligned}$$

Der Fehler der Trapezformel sinkt also wie $1/n^2$ mit zunehmender Zahl der Teilintervalle n

Das ist wesentlich schneller als mit der MC Methode $1/\sqrt{n}$!



Simpsonsche Regel

Die Simpsonsche Regel konvergiert noch schneller

- Man wähle eine gerade Zahl von Teilintervallen n im Integrationsintervall
- Die Näherung von $I = \int_a^b g(x) dx$ nach Simpson ist dann:

$$I \approx I_S = \frac{h}{3} [g(x_0) + 4g(x_1) + 2g(x_2) + 4g(x_3) + \dots + 4g(x_{n-1}) + g(x_n)]$$

mit $x_i = a + i h \quad i = 0, 1, \dots, n$

- Diese Formel wird hergeleitet, indem die Funktion $g(x)$ durch die 3 Funktionswerte von Intervallpaaren durch Polynome 2. Grades nähert
- **Man kann zeigen, dass der Fehler der Simpsonschen Regel mit $1/n^4$ abnimmt**



Beweis zur Simpsonschen Regel

Herleitung der Simpsonschen Regel:

Man betrachte das Intervall $[0, 2h]$ und berechne die zu integrierende Funktion an den 3 Stellen $g_i = g(x_i)$ mit $x_i = 0, h, 2h$

Durch diese 3 Stützstellen wird ein Polynom 2. Grades $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ gelegt:

$$\begin{aligned} g_0 &= a_0 & a_0 &= g_0 \\ g_1 &= a_0 + a_1h + a_2h^2 & \implies & a_1 = \frac{1}{2h} (-3g_0 + 4g_1 - g_2) \\ g_2 &= a_0 + 2a_1h + 4a_2h^2 & & a_2 = \frac{1}{2h^2} (g_0 - 2g_1 + g_2) \end{aligned}$$

Das Integral der Funktion $g(x)$ in diesem Intervall wird nun genähert durch

$$\tilde{I} = \int_0^{2h} g(x) dx \approx \tilde{I}_S = \int_0^{2h} p(x) dx = \left[a_0x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} \right]_0^{2h} = 2a_0h + 2a_1h^2 + \frac{8}{3}a_2h^3$$

Ersetzen der Polynomkoeffizienten durch die Funktionsstützstellen ergibt:

$$\begin{aligned} \tilde{I}_S &= 2g_0h + h[-3g_0 + 4g_1 - g_2] + \frac{4}{3}h[g_0 - 2g_1 + g_2] \\ &= h \left[\frac{1}{3}g_0 + \frac{4}{3}g_1 + \frac{1}{3}g_2 \right] \\ &= \frac{h}{3} [g_0 + 4g_1 + g_2] \end{aligned}$$



Beweise zur Simpsonschen Regel

Wir betrachten nun das gesamte Integrationsintervall $[a, b]$ und teilen es in n gleiche Teilintervalle, d.h. $n/2$ Doppelintervalle der Breite $2h$

$$\begin{aligned}
 I &= \int_a^b g(x) dx \approx I_S \\
 &= \frac{h}{3} [g_0 + 4g_1 + g_2] + \frac{h}{3} [g_2 + 4g_3 + g_4] + \frac{h}{3} [g_4 + 4g_5 + g_6] + \dots \\
 &\quad + \frac{h}{3} [g_{n-2} + 4g_{n-1} + g_n] \\
 I_S &= \frac{h}{3} [g_0 + 4g_1 + 2g_2 + 4g_3 + \dots + 2g_{n-2} + 4g_{n-1} + g_n]
 \end{aligned}$$

Berechnung des Fehlers:

Wir betrachten zunächst wieder ein Teilintervall $[0, 2h]$ und entwickeln das Integral bis zur 4. Ordnung:

$$\begin{aligned}
 \tilde{I} &= \int_0^{2h} g(x) dx = \int_0^{2h} \left[g(0) + xg'(0) + \frac{x^2}{2}g''(0) + \frac{x^3}{6}g'''(0) + \frac{x^4}{24}g''''(0) + \dots \right] dx \\
 &= \left[xg(0) + \frac{x^2}{2}g'(0) + \frac{x^3}{6}g''(0) + \frac{x^4}{24}g'''(0) + \frac{x^5}{120}g''''(0) + \dots \right]_0^{2h} \\
 &= 2hg(0) + 2h^2g'(0) + \frac{4}{3}h^3g''(0) + \frac{2}{3}h^4g'''(0) + \frac{4}{15}h^5g''''(0) + \dots
 \end{aligned}$$



Beweise zur Simpsonschen Regel

Entwicklung der Simpson Näherung bis zur 4. Ordnung gibt:

$$\begin{aligned}
 \tilde{I}_S &= \frac{h}{3} [g(0) + 4g(h) + g(2h)] \\
 &= \frac{h}{3} \left[g(0) + 4 \left\{ g(0) + hg'(0) + \frac{h^2}{2}g''(0) + \frac{h^3}{6}g'''(0) + \frac{h^4}{24}g''''(0) + \dots \right\} \right. \\
 &\quad \left. + \left\{ g(0) + 2hg'(0) + 2h^2g''(0) + \frac{4}{3}h^3g'''(0) + \frac{2}{3}h^4g''''(0) + \dots \right\} \right] \\
 &= \frac{h}{3} \left[6g(0) + 6hg'(0) + 4h^2g''(0) + 2h^3g'''(0) + \frac{5}{6}h^4g''''(0) + \dots \right] \\
 &= 2hg(0) + 2h^2g'(0) + \frac{4}{3}h^3g''(0) + \frac{2}{3}h^4g'''(0) + \frac{5}{18}h^5g''''(0) + \dots
 \end{aligned}$$

Das ist bis einschließlich der Ordnung h^4 identisch zur Entwicklung von \tilde{I} und deshalb gilt für die Differenz

$$\tilde{I}_S - \tilde{I} \approx \frac{1}{90} h^5 g''''(0) = \frac{1}{90} \frac{(b-a)^5}{n^5} g''''(0)$$

Die Varianz des gesamten Integrals ist dann

$$\begin{aligned}
 V[I_S] &= E[I_S - I] \approx E \left[\left(\sum_{i=1}^{n/2} \frac{1}{90} \frac{(b-a)^5}{n^5} g''''(x_i) \right)^2 \right] \quad \text{mit } x_i = a + i2h \\
 &= \left(\frac{1}{90} \frac{(b-a)^5}{n^5} \right)^2 E \left[\left(\sum_{i=1}^{n/2} g''''(x_i) \right)^2 \right] = \left(\frac{1}{360} \frac{(b-a)^5}{n^4} \langle g''''(x_i) \rangle \right)^2
 \end{aligned}$$



Vergleich der Integrationsmethoden

- Bei eindimensionalen Integralen sind numerische Verfahren (Trapez, Simpson, ...) der Monte Carlo Methode überlegen
 - Bei gleicher Zahl n der berechneten Funktionswerte ist der Fehler wesentlich kleiner
 - Außerdem entfällt der Aufwand zur Berechnung der Zufallszahlen
- Die Monte Carlo Methode ist überlegen bei mehrdimensionalen Integralen
 - Bei einem d -dimensionalen Integral und n berechneten Funktionswerten gibt es in jeder Dimension $\sqrt[d]{n}$ Intervalle
 - Der Fehler aus der Trapezregel ist dann proportional zu

$$1 / (\sqrt[d]{n})^2 = n^{-2/d}$$

- Der Fehler der MC Methode bleibt aber proportional zu $1/\sqrt{n}$
- D.h. die MC Methode ist vorteilhaft für

$$-\frac{2}{d} > -\frac{1}{2} \quad \text{oder} \quad d > 4$$

- Außerdem können in der MC Methode auch komplizierte Integrationsgrenzen einfach behandelt werden



Numerische Verfahren zur Lösung von Gleichungen

Das Problem ist das Lösen von Gleichungen der Form $f(x) = 0$

Man unterscheidet

- algebraische Gleichungen
 $f(x)$ ist eine reelles Polynom, also

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \quad a_i \in \mathbb{R}$$

- alle anderen Gleichungen heißen transzendente Gleichungen
- Algebraische können zwar bis zum Grad $n = 4$ analytisch gelöst werden aber bereits für $n = 3$ ist die Lösung so kompliziert, dass numerische Verfahren vorzuziehen sind:
Horner-Schema, QD-Verfahren, ...
- Transzendente Gleichungen lassen sich i.a. nur numerisch lösen

MAPLE enthält effiziente Algorithmen zur Lösung von Gleichungen

Wir wollen nur hier nur einen einfachen Algorithmus vorstellen



Iterationsverfahren

Die Aufgabe ist die transzendente Gleichung $f(x) = 0$ lösen

- Man kann diese Gleichung immer in die Form $x = g(x)$ bringen

Beispiel:

$$e^{-x/2} - \sin^2 x = 0 \implies x = \arcsin e^{-x/4}$$

oder $x = -4 \ln(\sin x)$

oder $x = x + e^{-x/2} - \sin^2 x$

- Unter den beiden Bedingungen

$$g(x) \in I \quad \text{und} \quad |g'(x)| < 1 \quad \text{für alle } x \in I$$

wird dann eine Lösung im Intervall durch das Iterationsverfahren gefunden:

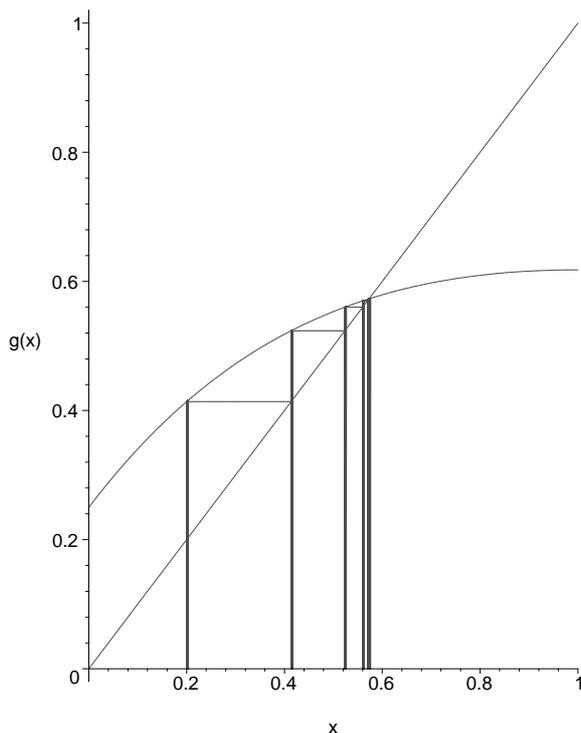
$$x_i = g(x_{i-1}) \quad i = 1, 2, \dots$$

Man beginne mit einem Startwert $x_0 \in I$ und breche die Iteration ab, wenn die Änderung kleiner als eine vorgegebene Genauigkeit ε wird:

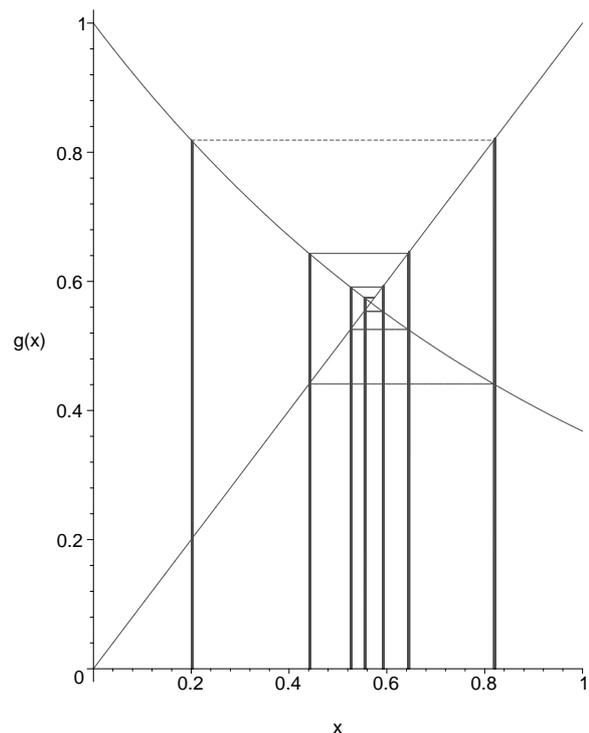
$$|x_i - x_{i-1}| < \varepsilon$$



Illustration des Iterationsverfahren



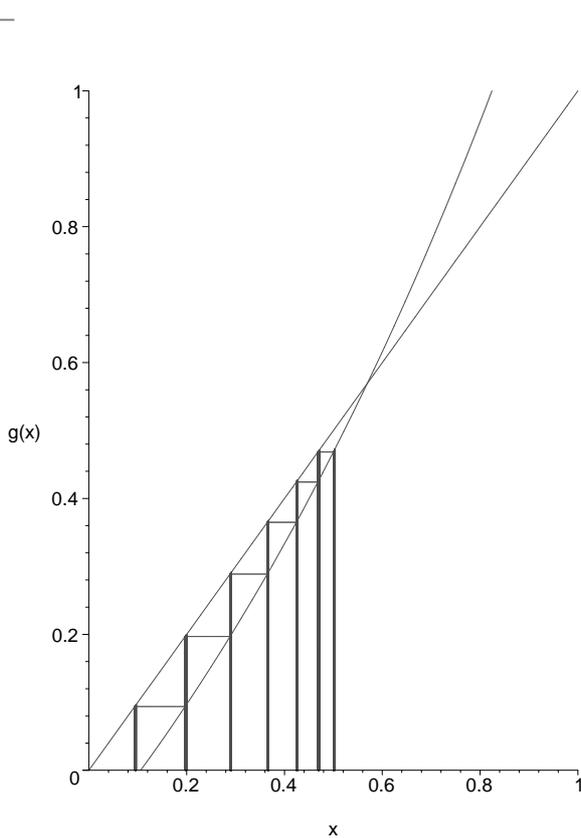
$$0 < g'(x) < 1$$



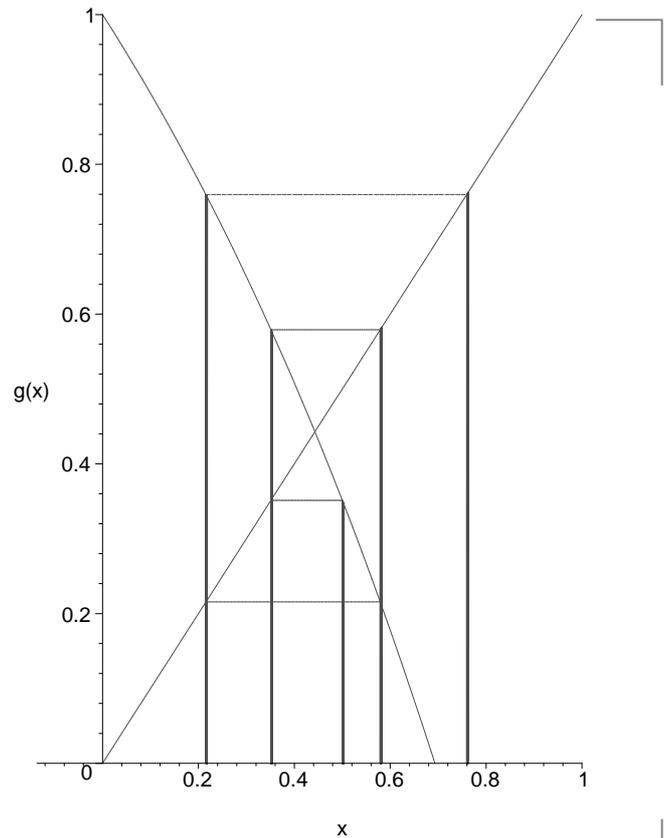
$$-1 < g'(x) < 0$$



Illustration des Iterationsverfahren



$$g'(x) > 1$$



$$g'(x) < -1$$



Numerische Methoden zur Lösung von Differentialgleichungen

- Differentialgleichungen (DGL) sind in der Physik von außerordentlicher Wichtigkeit

Sehr viele physikalische Probleme werden durch DGLs beschrieben

- Aber nur wenige Typen von DGLs lassen sich elementar integrieren, d.h. analytisch lösen

Numerische Verfahren zur Lösung sind daher von besonderer Bedeutung

- Wir haben mit MAPLE ein effizientes Computerprogramm zur analytischen und numerischen Lösung von DGL kennen gelernt

Hier: Vorstellung der Prinzipien einiger wichtiger numerischer Lösungsverfahren



Klassifizierung von DGLs

Eine DGL ist eine Gleichung zwischen gesuchten Funktionen einer oder mehrerer Variablen, diesen Variablen und den Ableitungen der gesuchten Funktionen

- **Gewöhnliche DGL:** (engl. Ordinary Differential Equation ODE) die gesuchte Funktion hängt nur von einer Variablen x ab, z.B.

$$a \frac{d^2 y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy = 0 \quad \text{gesucht } y(x)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - xy^4 \frac{dy}{dx} + \sin y = 0 \quad \text{gesucht } y(x)$$

- **Partielle DGL:** die gesuchte Funktion hängt von mehreren Variablen ab, z.B.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = xyz \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \quad \text{gesucht } z(x, y)$$

- Eine gewöhnliche DGL hat die Ordnung r , falls die höchste vorkommende Ableitung die Ordnung r hat: $y^{(r)}(x) = \frac{d^r y}{dx^r}$

- Eine gewöhnliche DGL heißt linear, falls sie linear in den Ableitungen ist

$$\sum_{i=1}^r y^{(i)}(x) = f(x, y)$$



Allgemeine und spezielle Lösungen

- Allgemein hat die Lösung einer gewöhnlichen DGL der Ordnung r die Form

$$y(x; C_1, C_2, \dots, C_r)$$

wobei C_1, C_2, \dots, C_r beliebige Konstanten sind (Integrationskonstanten)

- Spezielle Lösung erhält man durch Angabe von Nebenbedingungen, die die Integrationskonstanten bestimmen

- **Besonders wichtig in der Physik ist das Anfangswertproblem (AWP)**
Angabe des Funktionswerts und der ersten $r - 1$ Ableitungen für $x = x_0$

Beispiel Schwingungsgleichung:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

Die allgemeine Lösung ist

$$x(t; C_1, C_2) = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t$$

und die spezielle Lösung für das vorliegende Problem erhält man durch Angabe von zwei Anfangsbedingungen für $x(t=0)$ und $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = \dot{x}(t=0)$

- **Numerische Verfahren können nur spezielle Lösungen ermitteln**
erfordern also Angaben der Nebenbedingungen



Differentialgleichungen höherer Ordnung

Eine DGL höherer Ordnung kann immer auf einen Satz von DGL's erster Ordnung zurückgeführt werden

Beispiel:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + q(x) \frac{dy}{dx} = r(x)$$

Setze $z(x) = \frac{dy}{dx}$ woraus sich eine DGL erster Ordnung für $z = z(x)$ ergibt

$$\frac{dz}{dx} + q(x) z = r(x)$$

Das allgemeine Problem der Lösung von gewöhnlichen DGLs der Ordnung r kann auf die Lösung von DGLs erster Ordnung zurück geführt werden



Numerische Lösungen von DGLs

Wir stellen jetzt Verfahren zur numerischen Lösung von Anfangswertproblemen vor und beschränken uns auf gewöhnliche DGLs erster Ordnung

- Eine DGL 1. Ordnung kann immer in folgende Form gebracht werden:

$$y' = f(x, y) = f(x, y(x))$$

Die Anfangsbedingung sei $y_0 = y(x_0)$

Die Grundidee numerischer Methoden ist die numerische Integration dieser DGL

- Als numerische Lösung erhält man natürlich keine analytische Funktion
 - sondern eine Wertetabelle $y_i = y_i(x_i)$, die möglichst nahe an der wahren Funktion $y = y(x)$ liegen sollten
 - bzw. eine Vorschrift (Prozedur) um eine solche Wertetabelle zu erzeugen



Euler-Cauchy Polygonzugverfahren

Die gewöhnliche DGL 1. Ordnung des AWP

$$y' = f(x, y) \quad y(x_0) = y_0$$

wird integriert im Intervall $[x_0, x]$

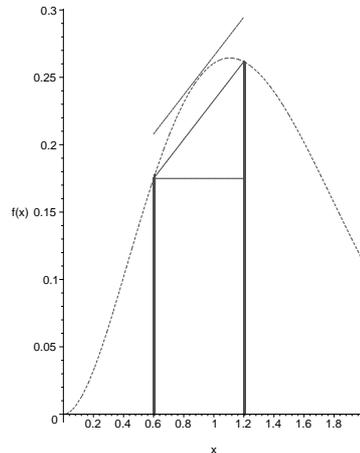
$$\int_{x_0}^x y' dt = y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

Wähle $x = x_1 = x_0 + h$

Mit Hilfe des Mittelwertsatzes lässt sich ein einfaches Integral dann schreiben als

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = hf(x_0) + \frac{h^2}{2} f'(\xi_0)$$

mit $\xi_0 \in [x_0, x_1]$



⇒ für die Integration der DGL folgt damit

$$y(x_1) = y(x_0) + hf(x_0, y(x_0)) + \frac{h^2}{2} f'(\xi_0, y(\xi_0))$$



Universität Hamburg

Datenverarbeitung in der Physik

Vorlesung 10 – p. 19

Euler-Cauchy Polygonzugverfahren

Einsetzen der DGL $y' = f(x, y)$ ergibt dann

$$y(x_1) = y(x_0) + hy'(x_0) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_0)$$

wobei ξ_0 irgendwo im Intervall $[x_0, x_1]$ liegt

Das Euler-Cauchy Verfahren ist die einfachste Methode

Die Näherung besteht aus Weglassen des y'' Terms

$$y(x_1) \approx y(x_0) + hy'(x_0) = y(x_0) + hf(x_0, y(x_0))$$

Man setzt nun solche Teilintervalle der Breite h aneinander und berechnet den Funktionswert $y_i = y(x_i)$ an der Stelle $x_i = x_0 + ih$ dann näherungsweise mit der Rekursionsformel:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

Das ist das Polygonzugverfahren von Euler und Cauchy



Universität Hamburg

Datenverarbeitung in der Physik

Vorlesung 10 – p. 20

Euler-Cauchy Polygonzugverfahren

Geometrische Veranschaulichung:

Ausgehend vom Anfangswert $y_0 = y(x_0)$ berechnet man den Wert y_1 mit Hilfe der Ableitung $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$

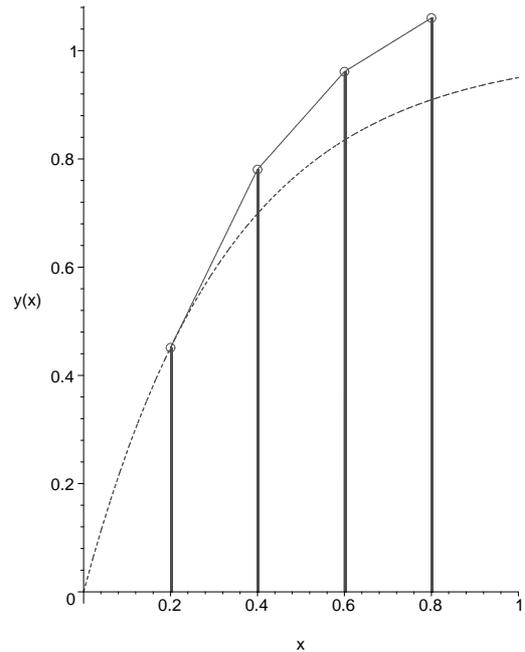
$$y_1 = y_0 + h y'(x_0)$$

dann den Wert y_2 aus y_1 und der Ableitung an dieser Stelle

$$y'(x_1) = f(x_0 + h, y_1)$$

USW.

⇒ Näherung von $y(x)$ durch einen Polygonzug



Beispiel zu Euler-Cauchy

Wir betrachten das Anfangswertproblem $y' = y$ mit $y(0) = 1$

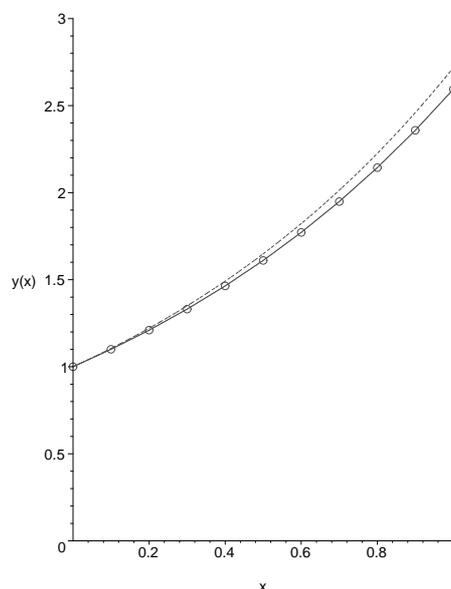
Die exakte Lösung dieses einfachen Problems ist natürlich die Exponentialfunktion $y(x) = e^x$

Lösung nach Euler-Cauchy: Es gilt $f(x, y) = y' = y(x)$

$$y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i) = y_i + h y_i = (1 + h) y_i = (1 + h)^{i+1} y_0 = (1 + h)^{i+1}$$

Wertetabelle für $h = 0.1$ im Intervall $[0, 1]$

i	x_i	y_i	e^{x_i}	$e^{x_i} - y_i$
0	0.0	1.0000	1.0000	0.0000
1	0.1	1.1000	1.1052	0.0052
2	0.2	1.2100	1.2214	0.0114
3	0.3	1.3310	1.3499	0.0189
4	0.4	1.4641	1.4918	0.0277
5	0.5	1.6105	1.6487	0.0382
6	0.6	1.7716	1.8221	0.0506
7	0.7	1.9487	2.0138	0.0650
8	0.8	2.1436	2.2255	0.0820
9	0.9	2.3579	2.4596	0.1017
10	1.0	2.5937	2.7183	0.1245



Runge-Kutta-Verfahren

Als simpelster Algorithmus hat das Euler-Cauchy Verfahren große Schwächen

- Asymmetrie: Die Ableitung wird immer an der linken Intervallgrenze berechnet und zur Extrapolation zum nächsten Wert benutzt
- Die Genauigkeit ist deshalb sehr beschränkt weil bereits Terme der Ordnung h^2 weggelassen werden

Viel größere Genauigkeit erreicht man mit Runge-Kutta-Verfahren

Die Grundidee ist hier die Extrapolation durch weitere Stützstellen im Intervall zu verbessern

- **Runge-Kutta 2. Ordnung (oder Midpoint-Method)**
Hier wird zunächst bis zu dem Punkt in der Intervallmitte extrapoliert und dort die Funktion $f(x, y)$ berechnet, welche dann zur Extrapolation benutzt wird

$$k_1 = h f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = h f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$y_{n+1} = y_n + k_2$$

Dieses Verfahren ist korrekt bis einschließlich der Ordnung h^2



Universität Hamburg

Datenverarbeitung in der Physik

Vorlesung 10 – p. 23

Runge-Kutta Verfahren

Geometrische Veranschaulichung der Runge-Kutta-Methode 2. Ordnung

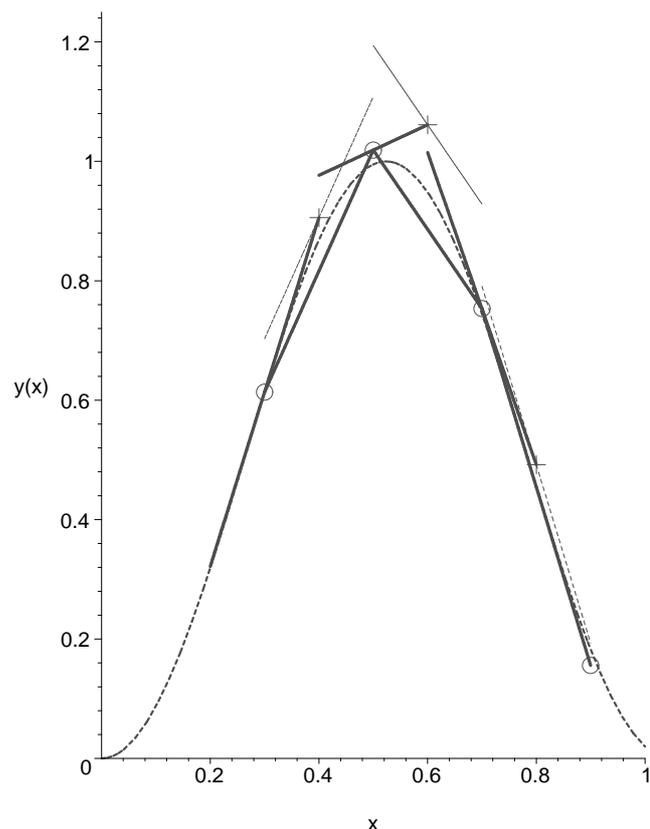
- Kreise stellen die berechneten Punkte y_i dar
- Kreuze sind die Hilfspunkte in den Intervallmitten

Berechnung eines Punktes in der Intervallmitte mit $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$ und Extrapolation mit der Ableitung an dieser Stelle bis Intervallende

$\Rightarrow y_1$

Wiederholung für 2. Punkt y_2

und 3. Punkt y_3 usw.



Universität Hamburg

Datenverarbeitung in der Physik

Vorlesung 10 – p. 24

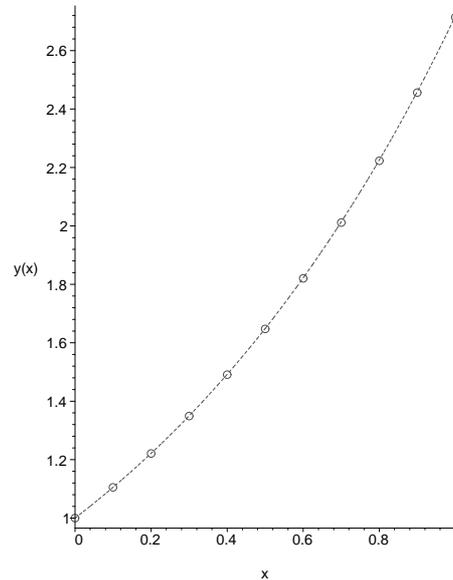
Beispiel zu Runge-Kutta 2. Ordnung

Wir betrachten wieder das Anfangswertproblem $y' = y$ mit $y(0) = 1$ mit der exakten Lösung $y(x) = e^x$

Wir wenden darauf das Runge-Kutta-Verfahren 2. Ordnung an

Wertetabelle für $h = 0.1$ im Intervall $[0, 1]$

i	x_i	y_i	e^{x_i}	$e^{x_i} - y_i$
0	0.0	1.0000	1.0000	0.0000
1	0.1	1.1050	1.1052	0.0002
2	0.2	1.2210	1.2214	0.0004
3	0.3	1.3492	1.3499	0.0006
4	0.4	1.4909	1.4918	0.0009
5	0.5	1.6474	1.6487	0.0013
6	0.6	1.8204	1.8221	0.0017
7	0.7	2.0116	2.0138	0.0022
8	0.8	2.2228	2.2255	0.0028
9	0.9	2.4562	2.4596	0.0034
10	1.0	2.7141	2.7183	0.0042



Runge-Kutta Verfahren

- Die Runge-Kutta-Methode kann man weiter verbessern, indem mehr Stützstellen in dem Intervall berechnet werden
- Runge-Kutta bezeichnet eigentlich eine ganze Klasse von Verfahren
- Ein sehr beliebtes Verfahren ist das Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung
Es ist korrekt bis einschliesslich h^4

$$k_1 = h f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = h f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = h f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = h f(x_n + h, y_n + k_3)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6}$$

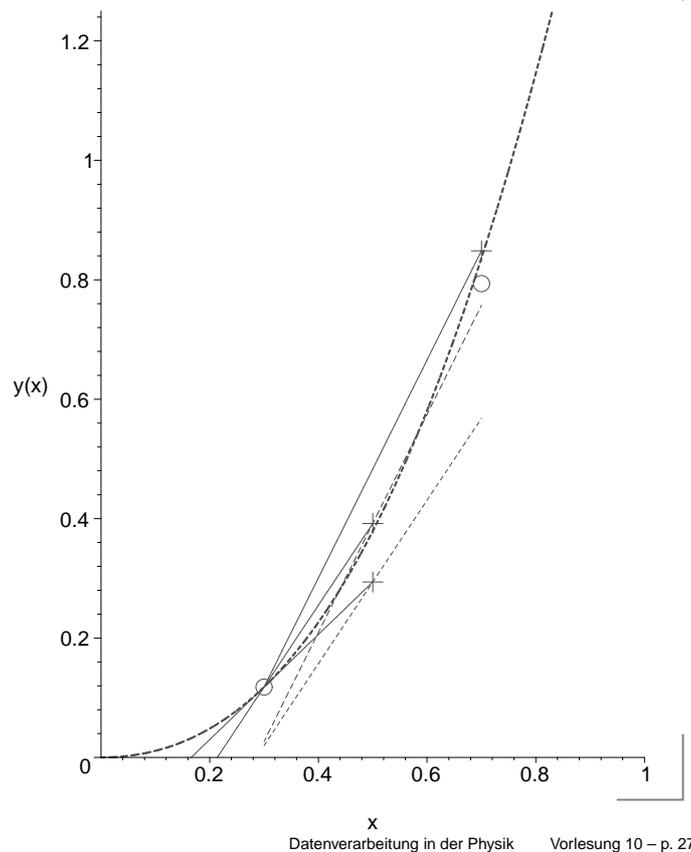
- Eine Abwandlung von Runge-Kutta ist neben andere Methoden auch in Maple implementiert zur numerischen Lösung von DGLs



Runge-Kutta-Verfahren

Veranschaulichung des Runge-Kutta-Verfahrens 4. Ordnung

1. Berechne Steigung bei (x_0, y_0) und Extrapolation bis Intervallmitte
2. Berechne Steigung an diesem Punkt und extrapoliere zu einem zweiten Punkt in der Intervallmitte
3. Berechne Steigung an diesem Punkt und extrapoliere bis zum Intervallende
4. Gewichtetes Mittel der 4 berechneten und extrapolierten Steigungen ergibt y_1

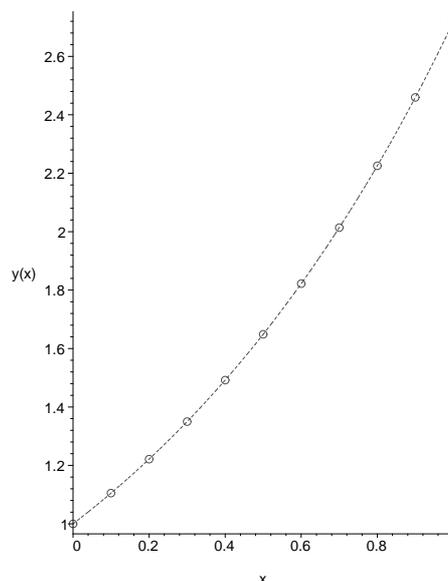


Beispiel zu Runge-Kutta 4. Ordnung

Wir wenden Runge-Kutta auf das Anfangswertproblem $y' = y$ mit $y(0) = 1$ an um zu zeigen, dass die Genauigkeit weiter gesteigert werden kann

Wertetabelle für $h = 0.1$ im Intervall $[0, 1]$

i	x_i	y_i	e^{x_i}	$e^{x_i} - y_i$
0	0.0	1.0000	1.0000	0.0000
1	0.1	1.1052	1.1052	$0.85 \cdot 10^{-7}$
2	0.2	1.2214	1.2214	$0.19 \cdot 10^{-6}$
3	0.3	1.3499	1.3499	$0.31 \cdot 10^{-6}$
4	0.4	1.4918	1.4918	$0.46 \cdot 10^{-6}$
5	0.5	1.6487	1.6487	$0.63 \cdot 10^{-6}$
6	0.6	1.8221	1.8221	$0.84 \cdot 10^{-6}$
7	0.7	2.0138	2.0138	$0.11 \cdot 10^{-5}$
8	0.8	2.2255	2.2255	$0.14 \cdot 10^{-5}$
9	0.9	2.4596	2.4596	$0.17 \cdot 10^{-5}$
10	1.0	2.7183	2.7183	$0.21 \cdot 10^{-5}$



Achtung: Nicht alle DGLs sind so einfach wie dieses Beispiel



Abschließende Diskussion zu DGLs

- Runge-Kutta-Verfahren erweisen sich als sehr leistungsfähige, allgemein anwendbare Verfahren zur numerischen Lösung von DGLs (AWPs)
- Das hier beschriebene klassische Runge-Kutta-Verfahren kann weiter verbessert werden, z.B. durch
 - Variablentransformation, so dass

$$y'(x_0) = 0$$

- Variable Schrittweite
Dieses sogenannte Runge-Kutta-Fehlberg-Verfahren ist korrekt bis einschließlich h^6
- Runge-Kutta ist aber nicht unbedingt das beste (genaueste, schnellste, . . .) Verfahren zur Lösung aller Typen von DGLs
- Man sollte nach Möglichkeit die Genauigkeit der gefundenen Lösung verifizieren, z.B. durch Verdoppelung der Schrittweite

